

BEPALING VAN DE ELECTRISCHE EIGENSCHAPPEN
VAN KWARTSKRISTALLEN

door

J. M. DOUWES DEKKER en G. J. SIEZEN

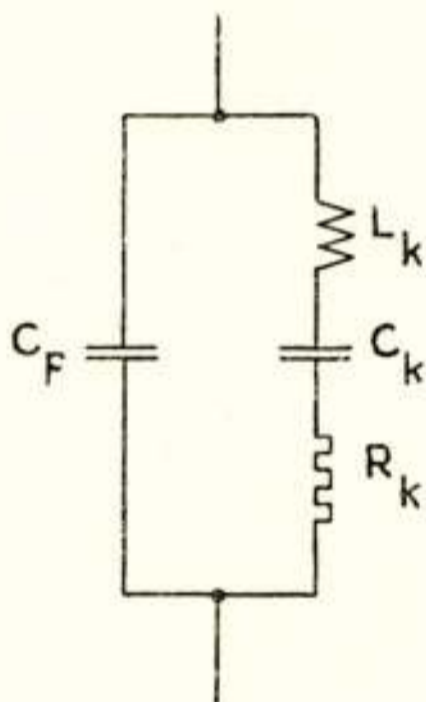
*Mededeeling uit de Laboratoria van het Staatsbedrijf
der P.T.T. te 's-Gravenhage.*

Samenvatting.

Een meetschakeling voor kwartskristallen wordt beschreven, waarin het te onderzoeken kristal zelf de meetfrequenties stabiliseert en waarmede de dempingsfactor naar keuze volgens de bandbreedte- of de uitslinger methode kan worden bepaald.

Inleiding.

Op andere plaats ¹⁾* is reeds het een en ander medegedeeld



Figuur 1.

over de fabricage van kwartskristallen door het Radiolaboratorium der P.T.T. In het onderstaande zal nader worden ingegaan op de wijze waarop de elektrische eigenschappen dezer kristallen worden bepaald.

Voor het frequentiegebied rondom de eerste resonantie kan, zoals bekend ²⁾, ³⁾, ⁴⁾, het vervangingsschema volgens fig. 1

*¹⁾ Deze cijfers verwijzen naar de literatuur opgave op pag. 146.

worden opgesteld. Het elektrische gedrag van het kristal wordt dus bepaald door vier grootheden: R_k , L_k , C_k en C_p . Hiervan kan C_p — de natuurlijke parallelcapaciteit van kristal met houder, bedrading, etc. — zonder moeilijkheden direct worden gemeten in een geschikte capaciteitsmeetbrug, indien de meetfrequentie maar zoo ver buiten de resonantie wordt gekozen dat de serietak een verwaarloosbaar kleine admittantie heeft. De waarde van C_p is hoofdzakelijk van belang voor de ligging van de parallelresonantie; in verband met het feit, dat de uitwendige parallelcapaciteiten die van het kristal zelf dikwijls geheel overvleugelen, voert men de meting van C_p bij voorkeur uit aan het kristal, gemonteerd in de schakeling waarin het toegepast zal worden.

De bepaling van de grootheden R_k , L_k en C_k , waarmede wij ons in het onderstaande uitsluitend zullen bezighouden, kan geschieden door het uitvoeren van drie onafhankelijke elektrische metingen, en wel bij voorkeur in de buurt van de serieresonantie, omdat hier de admittantie van de paralleltak practisch verwaarloosd kan worden. De hiervoor gebruikelijke methoden kunnen als volgt worden onderscheiden:

a. Verstemmingsmethode ⁵⁾ ⁶⁾ ⁷⁾.

Gemeten worden de serie-resonantiefrequentie ν_r , de bij deze frequentie optredende impedantie R_k en de verschuiving die ν_r ondergaat wanneer met het kristal een bekende zelfinductie of capaciteit in serie wordt geschakeld.

b. Bandbreedtemethode ⁸⁾ ⁸⁾ ⁹⁾.

Hierbij worden eveneens ν_r en R_k gemeten, doch daarna wordt de dempingsfactor $q = \frac{R_k}{L_k}$ afgeleid uit het verloop van de resonantiekromme rondom de serieresonantie.

c. Uitslingermethode ⁹⁾ ¹⁰⁾ ¹¹⁾.

Men meet hier, behalve ν_r , de grootte van de uitslingertijdconstante bij minstens twee bekende waarden van de uitwendige demping.

In het onderstaande zullen alleen de bandbreedtemethode en de uitslingermethode besproken worden. Deze methoden vullen elkaar op aangename wijze aan. De bandbreedtemethode wordt n.l. bij voorkeur toegepast voor kristallen met normale of hoge dempingsfactoren, terwijl de uitslingermethode zich in het bijzonder leent voor kristallen met zeer geringe verliezen.

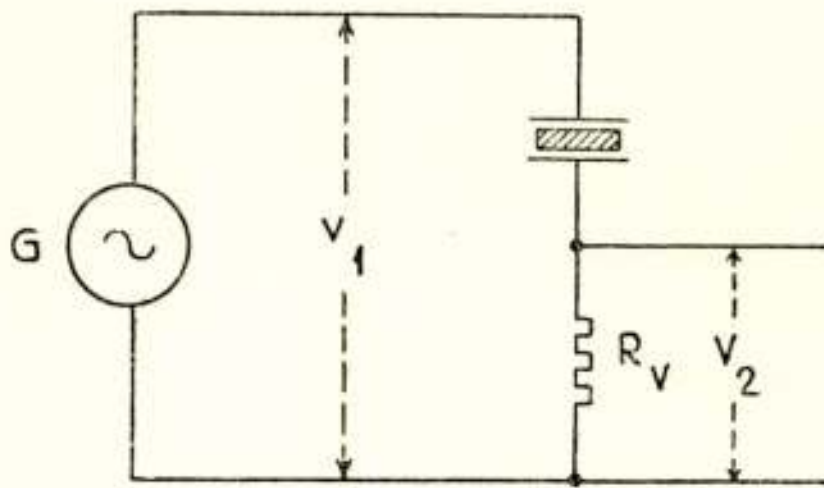
I. *Bandbreedtemethode.*

a. Principe.

Het kristal wordt in serie met een bekenden weerstand R_v aangesloten op den generator G , die een constante klemspanning V_1 met variabele frequentie ν levert (zie fig. 2). Allereerst wordt nu de frequentie ν_r gemeten waarbij serieresonantie optreedt; het maximum van V_2 dient hierbij als indicatie. Bij serieresonantie is de impedantie van het kristal reëel, en gelijk aan R_k . Door de verhouding $\frac{V_2}{V_1} = n$ te meten kan men R_k dus bepalen uit:

$$R_k = \frac{1 - n}{n} R_v$$

Vervolgens wordt bij constante klemspanning V_1 de generator verstemd tot de frequenties ν_1 en ν_2 links resp. rechts van



Figuur 2.

ν_r , waarbij de verhouding $\frac{V_2}{V_1}$ gedaald is tot een bepaald breukdeel r van de maximale waarde n (zie fig. 3).

Nu kan, zooals bekend, voor kleine verstemmingen rondom het resonantiepoint, de resonantiekromme worden voorgesteld door:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n}{\sqrt{1 + 16 \pi^2 \left(\frac{L_k}{R_k + R_v} \right)^2 (\nu - \nu_r)^2}}$$

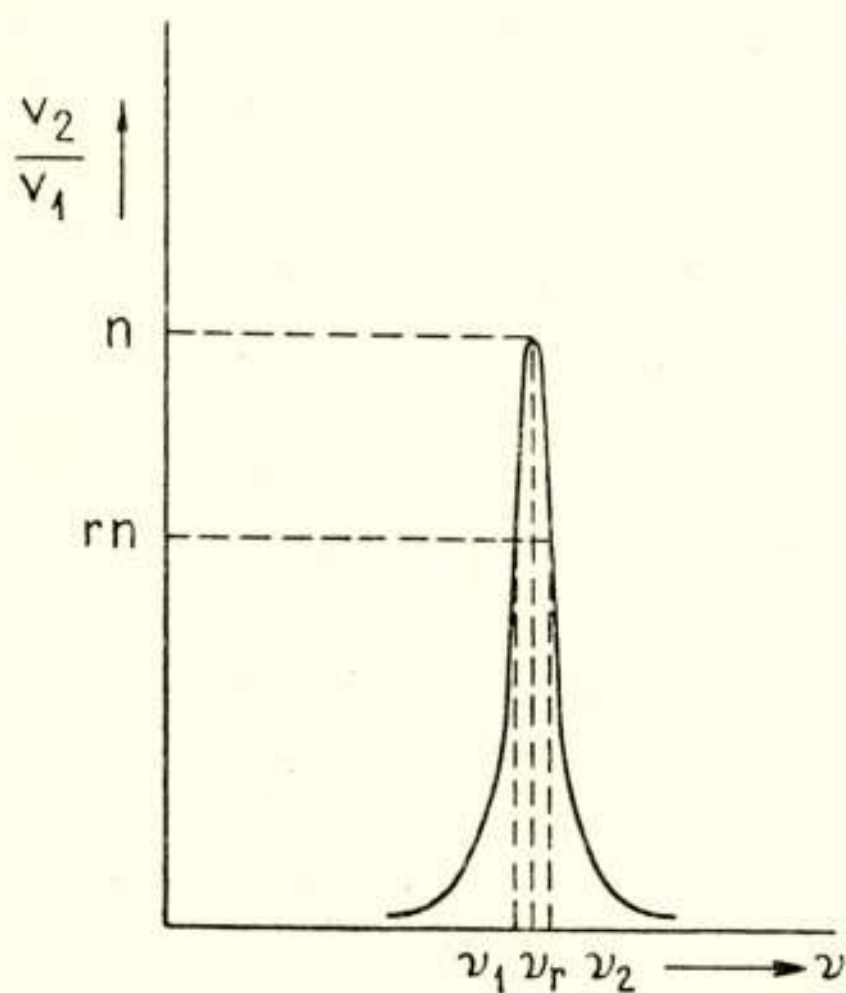
Hiervan gebruikmakend vindt men, na eenig omwerken, voor het verband tusschen den dempingsfactor $q = \frac{R_k}{L_k}$ en de volgens het bovenstaande gedefinieerde bandbreedte $\nu_2 - \nu_1$:

$$q = 2\pi(I - n) \sqrt{\frac{r^2}{I - r^2}} (\nu_2 - \nu_1).$$

De dempingsfactor kan dus uit de gemeten bandbreedte worden berekend. Wanneer ν_r , R_k en q bekend zijn, kunnen L_k en C_k eenvoudig gevonden worden uit:

$$L_k = \frac{R_k}{q} \quad \text{en} \quad C_k = \frac{I}{4\pi^2 \nu_r^2 L_k}.$$

Bij deze beschouwingen is afgezien van den invloed der parallelcapaciteit C_p . Dit is alleen toelaatbaar wanneer de admittantie van de serietak steeds groot is t.o.v. ωC_p . Met het oog



Figuur 3.

hierop is het gewenscht de frequenties ν_1 en ν_2 niet te ver van ν_r af te kiezen, hetgeen impliceert dat de spanningen V_1 en V_2 zeer nauwkeurig gemeten moeten worden.

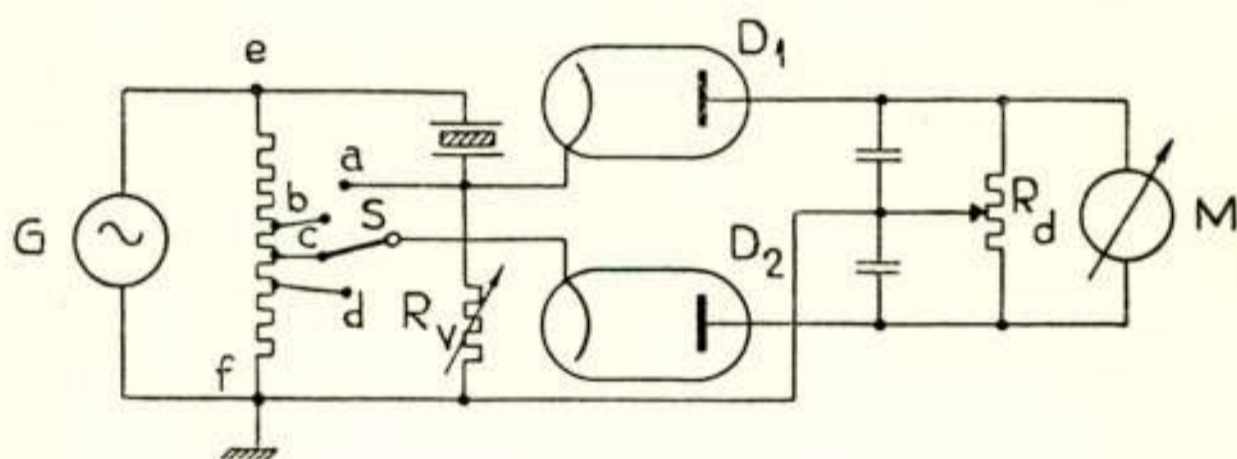
b. Practische uitvoering.

Voor het meten van de frequentie ν_r , doch vooral voor de bepaling van het frequentieverschil $\nu_2 - \nu_1$, dat in den regel niet meer dan enkele Hz bedraagt, is een zeer groote nauwkeurigheid vereischt. Deze kon in ons geval gemakkelijk worden bereikt met de frequentiemeetinrichting van het Radiolaboratorium der P.T.T. welke is aangesloten op de primaire

frequentiestandaarden aldaar. De kleine frequentieverschillen worden daarbij op multiples van de grondfrequenties gemeten m.b.v. een direct geïjkt General Radio Interpolatie-toongenerator.

Bij de meting van R_k fungeert de in decaden van 1, 10, 100 en 1000 Ω regelbare precisieweerstand R_v als normaal.

Het is van voordeel gebleken de spanningen V_1 en V_2 niet afzonderlijk te meten, doch direct de verhouding $\frac{V_2}{V_1}$ te bepalen met behulp van een geïjkt ohmschen spanningsdeeler (zie fig. 4, S in stand b , c of d). Bij de bepaling van R_k , wanneer de kristaltak een reële impedantie heeft, zou men hierbij gebruik kunnen maken van een wisselstroom-nulindicator in den brugtak. Deze methode laat ons echter in den steek bij verstemmingen tot ν_1 resp. ν_2 , waar een faseverschuiving tusschen V_1 en V_2 optreedt. Daarom is een kunstgreep toegepast, en



Figuur 4.

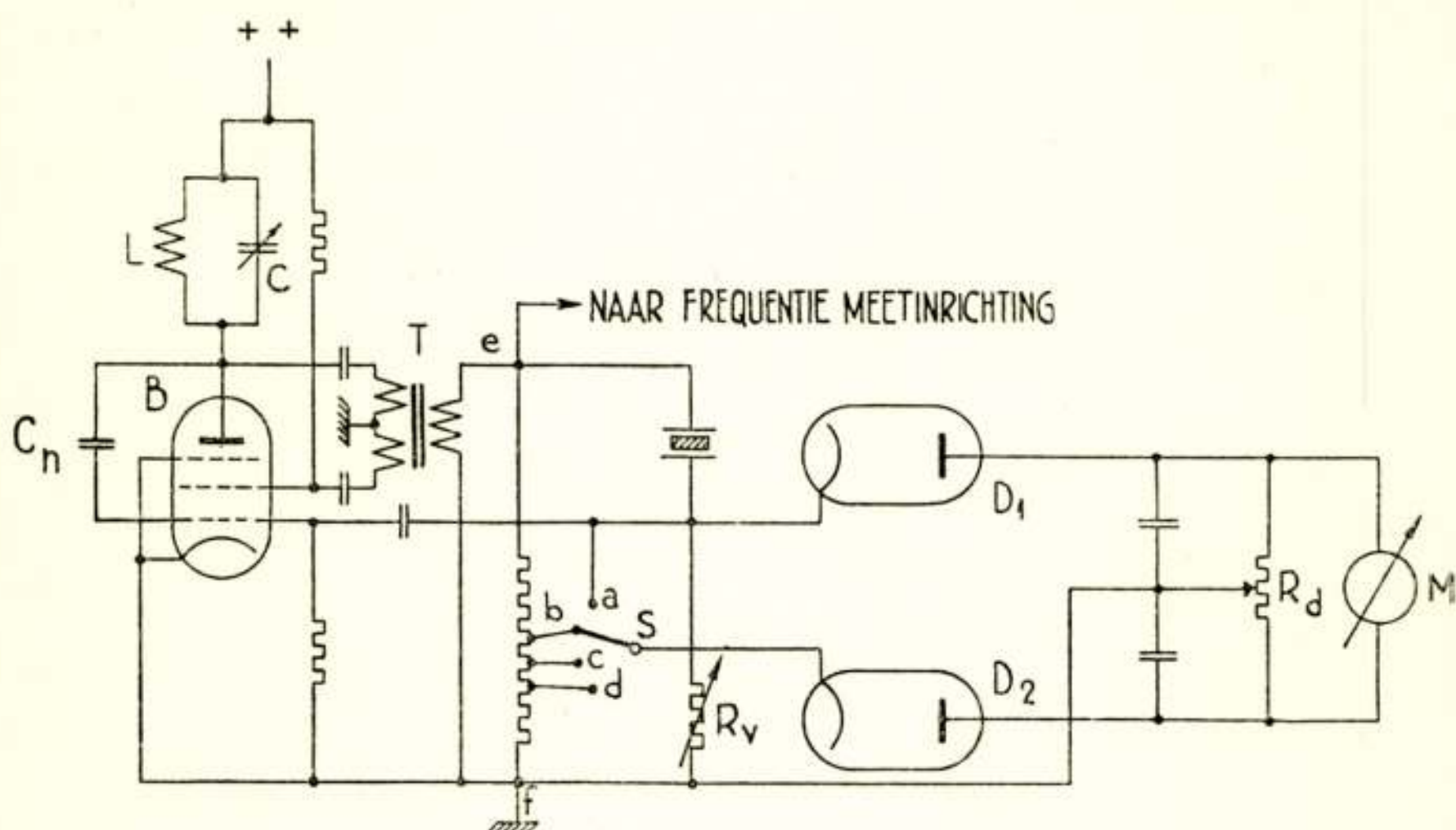
worden de spanningen aan de brugpunten eerst na afzonderlijk door de dioden D_1 en D_2 te zijn gelijkgericht m.b.v. een gevoelige gelijkstroom-nulindicator M met elkaar vergeleken. De gelijkheid der meetdioden kan worden gecontroleerd met den schakelaar S in stand a , waarbij M nul moet aanwijzen. Eventuele kleine verschillen worden met R_d gecompenseerd.

De generator G , welke de meetfrequenties opwekt, moet, zooals duidelijk is, een buitengewoon groote frequentiestabiliteit hebben. Een voldoende constantheid zou alleen met kwartssturing te bereiken zijn. Het ligt nu voor de hand om het te meten kristal zelf te gebruiken voor de stabilisatie van de meetfrequenties. Uit deze gedachte is de schakeling volgens fig. 5 ontstaan. Hierin genereert de buis B bij weglating van het kristal in een frequentie die wordt bepaald door den LC -kring in de plaatketen. De terugkoppeling geschiedt d.m.v. den transformator T

naar het schermrooster; een en ander is zoo gedimensionneerd dat de amplitude, ook bij sterke variatie der belasting, nagenoeg constant is over het geheele, door variatie van C bestreken frequentiegebied.

De spanning V_1 , waarmede de kristalketen wordt aangestooten, wordt afgenomen van een extra wikkeling op T en is zoo klein gekozen dat de kristallen niet overbelast kunnen worden. Dit is van belang, daar bij te groote amplituden breuk van het kristal kan optreden.

De aan R_v ontstaande spanning V_2 wordt teruggevoerd naar het stuurrooster van B . Brengt men nu de afstemming van den LC -kring in de buurt van de serie-resonantiefrequentie van het



Figuur 5.

kristal dan neemt de spanning op R_v toe en plotseling wordt de generator meegetrokken in een frequentie die door het kristal wordt bepaald. Dit meetrekken wordt nog bevorderd door het optreden van roosterstroom, waardoor het oorspronkelijke genereeren via het schermrooster wordt verzwakt.

Zoodra de generator eenmaal door het kristal wordt bestuurd, kunnen door betrekkelijk groote variaties van C nog slechts kleine verstemmingen worden teweeggebracht, daar de demping van den LC -kring zooveel grooter is dan die van de kristalketen. Dit heeft het praktische voordeel dat geen fijnregeling op C noodig is; de verstemmingen tot de frequenties ν_1 en ν_2 links resp. rechts van het resonantiepoint kunnen nauwkeurig genoeg

worden ingesteld met denzelfden condensator die, bij vrij oscilleren, een normaal frequentiebereik van bijv. 1 op 3.5 omvat.

Om te vermijden dat via de capaciteit tusschen stuur- en schermrooster, dus buiten het kristal om, een spanning aan R_v ontstaat is een neutrodyne-condensator C_n tusschen anode en stuurrooster aangebracht.

Van den potentiometer R_{ef} doet de aftakking b dienst bij de meting van R_k , terwijl naar keuze c of d kan worden gebruikt voor de bepaling van q .

De aftakking b is zoo gekozen, dat $\frac{R_{bf}}{R_{ef}} = n = 0.2$ als compromis tusschen een zoo hoog mogelijke spanning op bf eenerzijds en een zoo klein mogelijke waarde voor R_v anderzijds, het laatste in verband met de belasting door de dioden, den roosterstroom van B en parasitaire capaciteiten.

Voor de aftakking c is $\frac{R_{cf}}{R_{bf}} = r = 0.894$ gekozen. Dit vereenvoudigt de uitdrukking voor q tot:

$$q = 10 (v_2 - v_1)$$

Ter controle van de q -meting met S in stand c is, speciaal voor kristallen met kleine dempingsfactoren, nog een aftakking d aangebracht, corresponderend met tweemaal zoo groote verstemmingen. Zij is zoo gekozen dat $\frac{R_{df}}{R_{bf}} = 0.705$ zoodat hierbij

$$q = 5 (v_2 - v_1) \text{ wordt.}$$

De meting verloopt nu als volgt:

1. De gelijkheid der dioden wordt gecontroleerd met S in stand a ;
2. Met S in stand b en R_v op een willekeurige waarde wordt door variatie van C serieresonantie ingesteld; maximale uitslag van M dient als indicatie. De frequentie v_r wordt gemeten door de spanning aan het punt e , via een (niet geteekende) scheidingsbuis, ter vermindering van beïnvloeding van buiten af, aan de frequentie-meetinrichting toe te voeren;
3. Hierna wordt, met S in dezelfde stand, R_v ingesteld op een zoodanige waarde dat M nul aanwijst. Daarbij wordt, zoo noodig, de topinstelling weer even gecorrigeerd. Daar $n = 0.2$ vindt men dan voor den kristalweerstand: $R_k = 4 R_v$
4. Vervolgens wordt, met S in stand c , door variatie van C een frequentie $v_2 > v_r$ ingesteld en gemeten, waarbij M op-

nieuw nul aanwijst. Op dezelfde wijze wordt de frequentie $\nu_r < \nu_r$ bepaald. Uit het frequentieverschil $\nu_2 - \nu_1$ volgt dan de grootte van q (zie boven);

5. Eventueel wordt de meting sub. 4 herhaald met S in stand d .

c. Nauwkeurigheid.

Bij een schatting van de nauwkeurigheid moet men in de beschouwing opnemen:

1. De fout, gemaakt bij toepassing van de benaderingsformule voor q ;
2. De fout $\delta' V_2$ in V_2 gemaakt bij de nulinstelling volgens $I, b, 3$;
3. De fout $\delta'' V_2$ in V_2 gemaakt bij de nulinstelling(en) volgens $I, b, 4$;
4. De fout $\delta(\nu_2 - \nu_1)$ bij de frequentieverschilmeting.

De onder 1 genoemde fout in q is gelijk aan $\frac{I}{\delta} \left(\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_r} \right)^2$.

Dit bedrag is voor normale kristallen van de grootteorde 10^{-9} , dus geheel te verwaarlozen.

Uit de formules:

$$R_k = \frac{I-n}{n} R_v \quad \text{en} \quad q = 2\pi(I-n) \sqrt{\frac{r^2}{I-r^2}} (\nu_2 - \nu_1)$$

kan door differentiatie worden afgeleid, dat de totale fouten in R_k resp. q als volgt van de onder 2, 3 en 4 genoemde partieele fouten afhangen:

$$\frac{\delta R_k}{R_k} = - \frac{I}{n(I-n)} \cdot \frac{\delta' V_2}{V_1} = - 6.25 \frac{\delta' V_2}{V_1}$$

$$\frac{\delta q}{q} = - \left[\frac{I}{I-n} + \frac{I}{n(I-r^2)} \right] \frac{\delta' V_2}{V_1} + \frac{I}{rn(I-r^2)} \cdot \frac{\delta'' V_2}{V_1} + \frac{\delta(\nu_2 - \nu_1)}{\nu_2 - \nu_1} =$$

$$= - 26.25 \frac{\delta' V_2}{V_1} + 25 \frac{\delta'' V_2}{V_1} + 10 \frac{\delta(\nu_2 - \nu_1)}{q}$$

voor $n = 0.2$ en $r = 0.894$.

In ons geval was $V_1 = 10 V$ terwijl bij gebruik van een kleinen

spiegelgalvanometer met gevoeligheid van $2,4 \cdot 10^{-8} A$ de fout in V_2 bij de nulinstelling hoogstens $1.6 mV$ bedroeg.

Hieruit volgt, dat R_v tot op 1% nauwkeurig kan worden bepaald, terwijl de fout in q tengevolge van onjuiste nulinstellingen beneden 1% blijft. Voorts kon het frequentieverschil $\nu_2 - \nu_1$ gemeten worden met een nauwkeurigheid van $0.01 Hz$, zoodat de fout in q tengevolge van de frequentiemeting op $\frac{10}{q}\%$ gesteld moet worden, d.i. $1/2\%$ voor $q = 20$ (normaal) of 2% voor $q = 5$ (laag). De totale fout in q varieert dienovereenkomstig van ca. 1.5 tot 3% . Voor kristallen met zeer lage q moet V_1 kleiner dan $10 V$ gekozen worden, waardoor de nauwkeurigheid der meting nog verder achteruitgaat. De uitslinger methode is dan aangewezen.

II. Uitslinger methode.

De trillingsenergie van een zonder uitwendige demping uitslingerend kristal neemt af volgens:

$$W = W_0 \varepsilon^{-\frac{R_k}{L_k} t} = W_0 \varepsilon^{-qt}$$

Hierop baseeren Chaikin ¹⁰⁾ en Gockel ¹¹⁾ een methode voor de bepaling van den dempingsfactor q . Zij meten W als functie van t en zetten $\lg W = f(t)$ grafisch uit. De richtingsconstante van de aldus verkregen rechte lijn is dan gelijk aan $-q$. De meting van W wordt uitgevoerd m.b.v. een quadratischen detector gevolgd door een ballistischen galvanometer, waarvan de laatste op het juiste moment t wordt ingeschakeld door een roteerenden schakelaar of Helmholtz'schen slingeronderbreker.

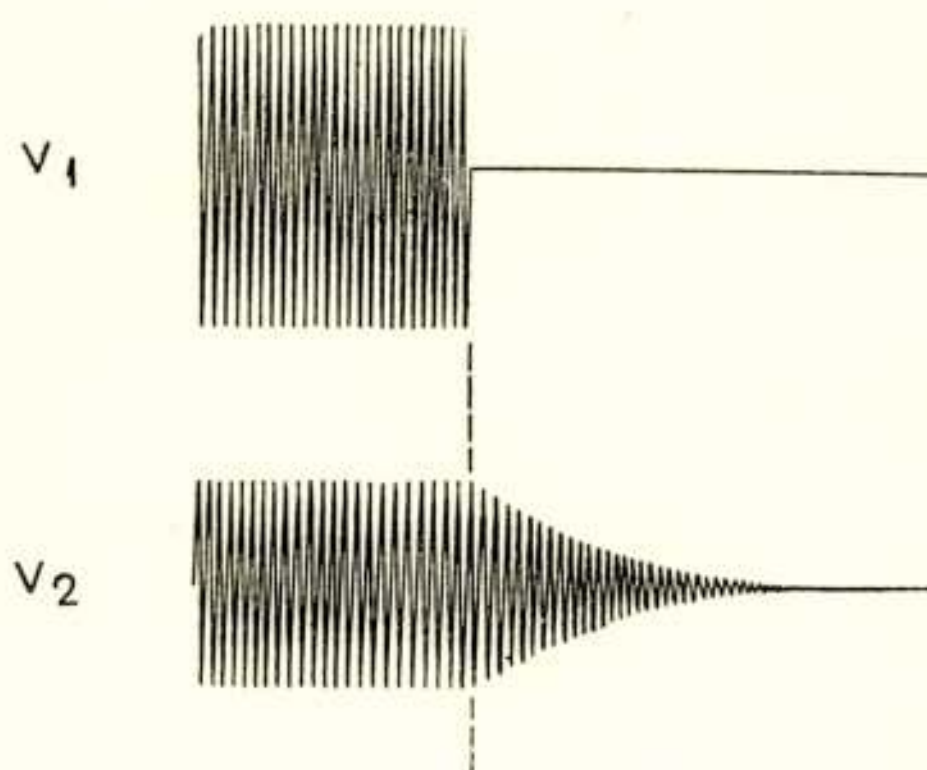
Afgezien van de moeilijkheden, tengevolge van demping door den detectorkring en capaciteitsvariatiën bij het openen van den tijdschakelaar, welke men ondervindt wanneer men het kristal onbelast — dus in de parallelresonantiefrequentie — laat uittrillen, levert de genoemde methode een weinig bevredigende technische oplossing, daar een vrij omvangrijke hulpapparatuur noodig is.

Een aanmerkelijke vereenvoudiging wordt bereikt bij de in het onderstaande aangegeven methode, waar het kristal in de serieresonantiefrequentie uittrilt over een lagen uitwendigen

weerstand en de uitslinger-tijdconstante m.b.v. een kathodestraalbuis wordt vergeleken met de tijdconstante van een gelijke RC -keten.

a. Principe.

Het kristal wordt opgenomen in een schakeling zoals aangegeven in fig. 2 en in serieresonantie gebracht door het maximum van V_2 op te zoeken. Wordt de generator plotseling kortgesloten, dan zal de amplitude van V_2 evenredig met $\varepsilon^{-\frac{t}{T_V}}$



Figuur 6.

afnemen (fig. 6), waarbij de uitslingertijdconstante gegeven wordt door:

$$T_V = \frac{2 L_k}{R_k + R_v}$$

De spanning V_2 wordt nu toegevoerd aan de verticale afwijkplaten van een kathodestraalbuis, terwijl de horizontale deflectie wordt bestuurd door een gelijktijdig aanvangend relaxatieverschijnsel, opgewekt in een RC -keten met nauwkeurig bekende tijdconstante $T_H = R_H C_H$. Op het scherm van de kathodestraalbuis wordt dan een figuur beschreven, waarvan de contour in parameterform wordt gegeven door:

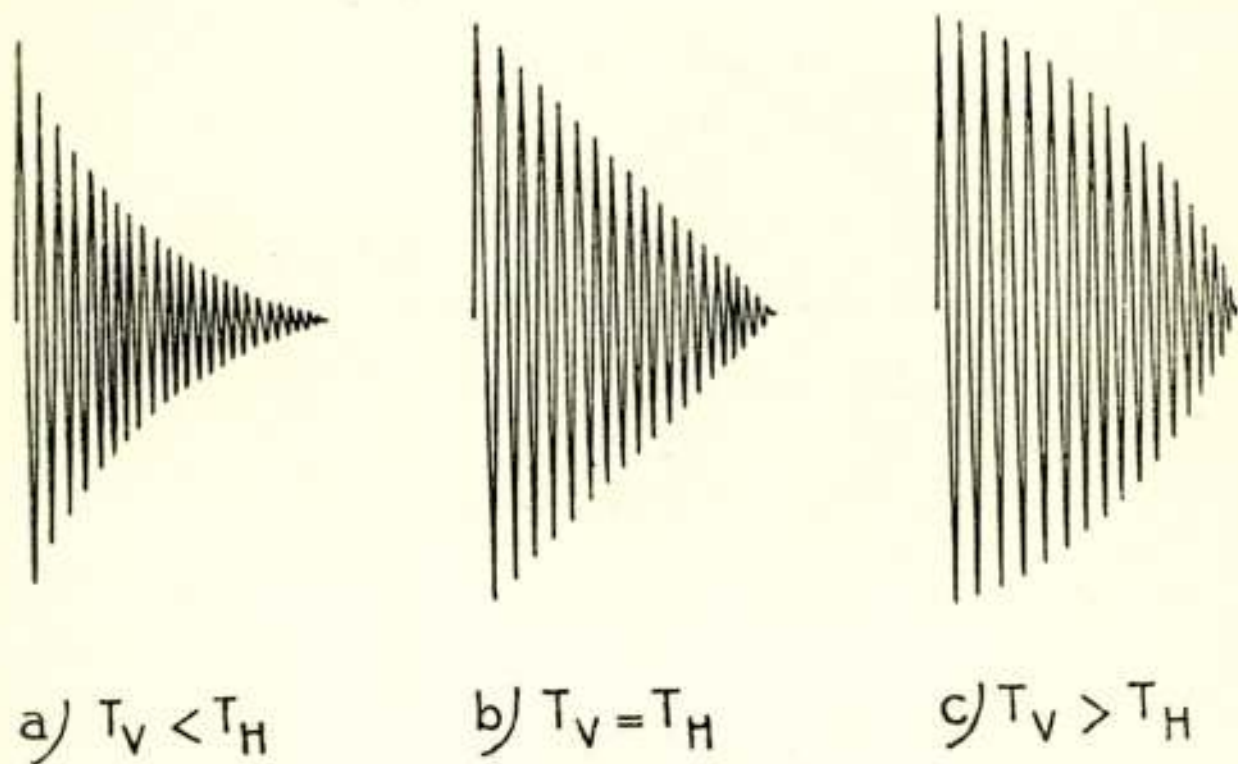
$$x = H \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{T_H}} \right) \quad y = V \varepsilon^{-\frac{t}{T_V}}$$

Eliminatie van den parameter t hieruit levert voor het verband tusschen x en y van den contour op:

$$\frac{y}{V} = \left(1 - \frac{x}{H}\right)^{\frac{T_H}{T_V}}$$

zoodat, afhankelijk van de verhouding van T_H tot T_V , beelden van den in fig. 7 geschetsten vorm kunnen ontstaan.

Men kan nu bij een bepaalde waarde van T_H door variatie van R_v (of andersom) bereiken dat de uitslingercontour overgaat in de rechte $\frac{y}{V} = 1 - \frac{x}{H}$ door de punten O, V en H, O . Is



Figuur 7.

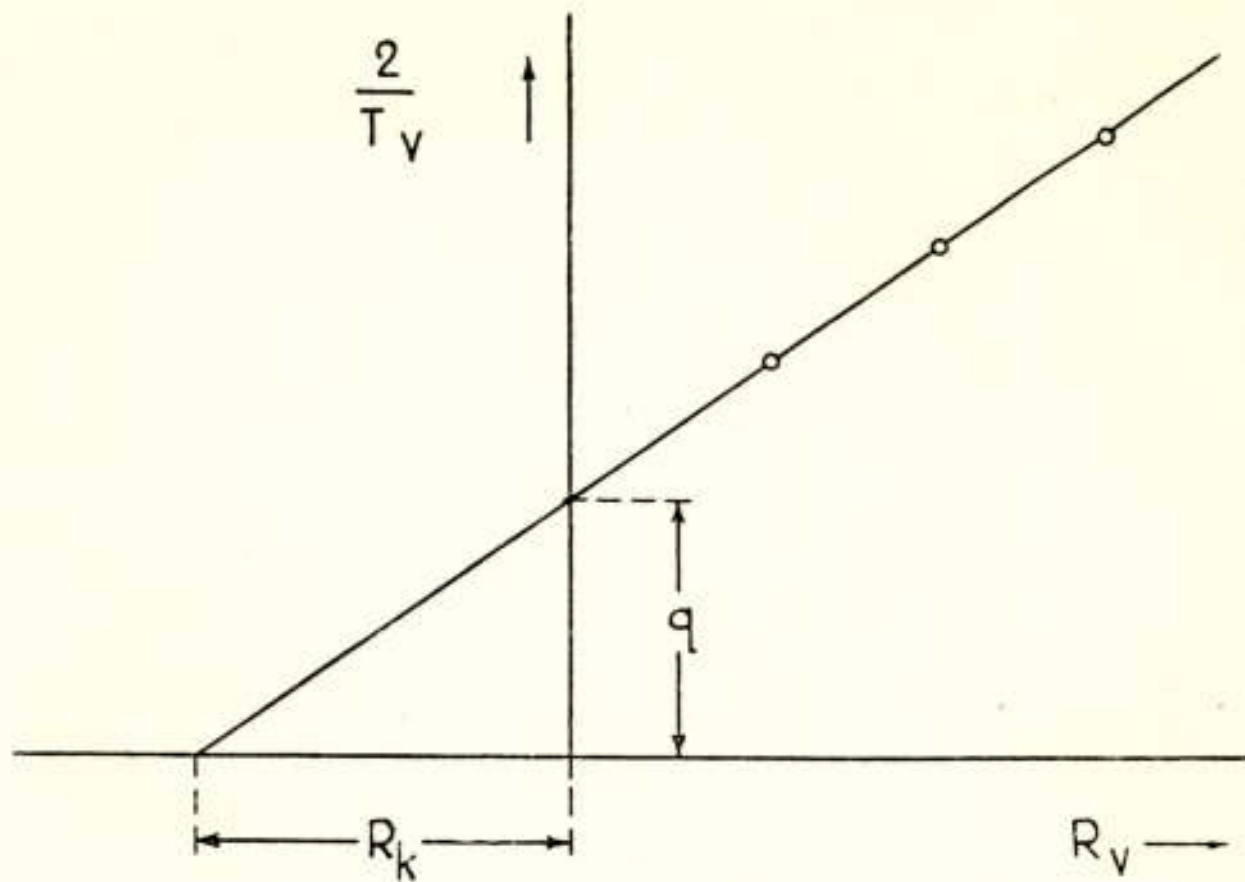
dit het geval dan is $T_V = T_H$, dus bekend. Voert men daarna dezelfde meting uit bij een andere waarde van T_H (resp. R_v) zoo is het mogelijk om uit de bijeenbehoorende waarden van R_v en T_H de grootheden R_k en L_k te berekenen. Immers:

$$T_{H_1} = T_{V_1} = \frac{2 L_k}{R_k + R_{v_1}} \quad \text{en} \quad T_{H_2} = T_{V_2} = \frac{2 L_k}{R_k + R_{v_2}}$$

dus
$$R_k = \frac{R_{v_1} T_{H_1} - R_{v_2} T_{H_2}}{T_{H_2} - T_{H_1}}$$

$$L_k = \frac{T_{H_1} T_{H_2}}{2} \cdot \frac{R_{v_1} - R_{v_2}}{T_{H_2} - T_{H_1}}$$

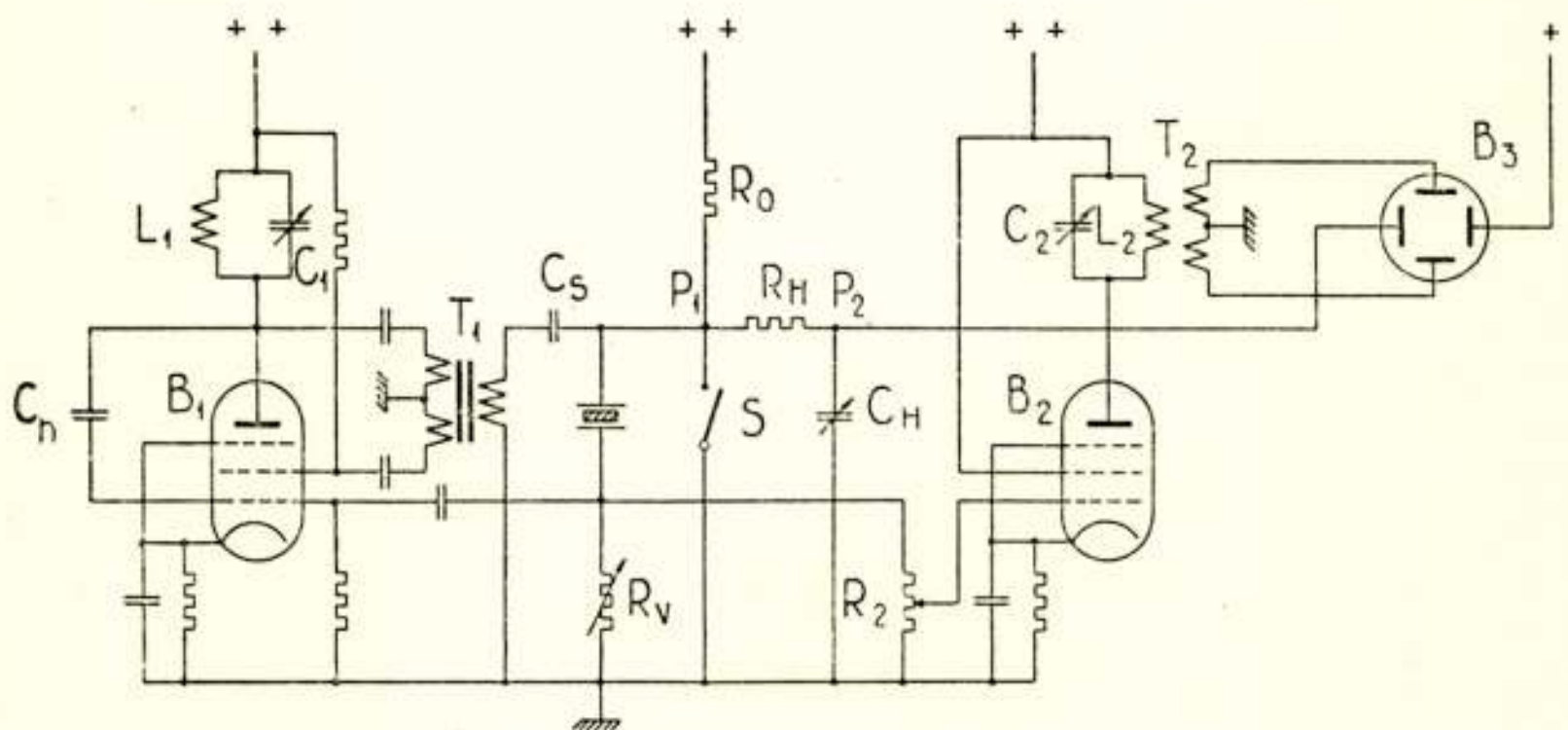
Nauwkeuriger nog is het om een geheele reeks van dergelijke metingen te doen en de gevonden waarden voor $\frac{2}{T_V}$ grafisch uit te zetten tegen R_v , zoals in fig. 8 is voorgesteld. De gevonden punten moeten dan op een rechte lijn liggen die van de assen de stukken q en $-R_k$ afsnijdt.



Figuur 8.

b. Practische uitvoering.

Voor de uitslingermetingen wordt de in fig. 9 weergegeven schakeling toegepast. Het kristal wordt in trilling gebracht in



Figuur 9.

een generatorschakeling overeenkomstig die van fig. 5. Slechts is, ter blokkeering van gelijkspanningen, de condensator C_s op-

genomen, doch deze is zoo groot gekozen dat de serieresonantie hierdoor niet meetbaar verschoven wordt.

De spanning over R_v wordt door de buis B_2 selectief versterkt en symmetrisch aan de verticale deflectieplaten van de kathode-straalbuis B_3 toegevoerd. De demping van den kring $L_2 C_2$ is eenige orden grooter dan die van de kristalketen, zoodat voor lineaire distorsie van het uitslingerverschijnsel niet behoeft te worden gevreesd. Voorts zijn de weerstanden R_o , R_2 en R_H alle zoo groot gekozen dat hun invloed op de kristalketen eveneens is te verwaarloozen.

De horizontale afwijking van den kathodestraal wordt bestuurd door de spanning aan C_H . De tijdconstante $T_H = R_H C_H$ van de relaxatie-keten voor de horizontale afwijkspanning is van dezelfde grootte-orde als T_V , dus zoo groot t.o.v. de periode der kristaltrillingen dat het punt P_2 voor deze trillingen steeds voldoende ontkoppeld is. Is de schakelaar S geopend, dan ontvangen de punten P_1 en P_2 via R_o een zoodanige positieve potentiaal dat de kathodestraal naar het begin van de X -as is afgeweken.

Het kristal wordt nu eerst op de bekende wijze in serieresonantie gebracht, waarbij de lengte van de verticale lichtstreep op de kathodestraalbuis het maximum van de spanning op R_v aanwijst. De serie-resonantiefrequentie ν_r wordt gemeten.

Wordt daarna, door het sluiten van den schakelaar S , het punt P_1 plotseling aan aarde gelegd, zoo wordt eenerzijds de generator kortgesloten, waardoor de spanning aan de verticale deflectieplaten uitslingert met een tijdconstante T_V , terwijl anderzijds de spanning aan P_2 exponentieel tot nul terugloopt met een tijdconstante T_H , zoodat de gewenschte synchrone afwijking van den kathodestraal naar het rechter eindpunt van de X -as wordt verkregen. Er worden dus beelden van de gedaante volgens fig. 7 beschreven.

Om een rechtlijnigen contour te verkrijgen kan men R_v varieeren bij constante T_H , of andersom. De eerste methode is in de onder IV te bespreken gecombineerde meetinrichting toegepast, daar R_v voor de bandbreedtemethode toch reeds als geijkte decadenweerstand moet worden uitgevoerd. De rechtlijnigheid van den contour kan het eenvoudigst met een over het scherm van de buis geplakt masker worden gecontroleerd (zie fig. 11 en 12). De grootste nauwkeurigheid bereikt men wanneer de beginamplitude V gelijk gekozen wordt aan de lengte H van de horizontale sweep. Voor de maximale afwijking h , die de contour voor $T_V \neq T_H$ van de rechte lijn vertoont, (zie fig. 10) vindt men n.l.:

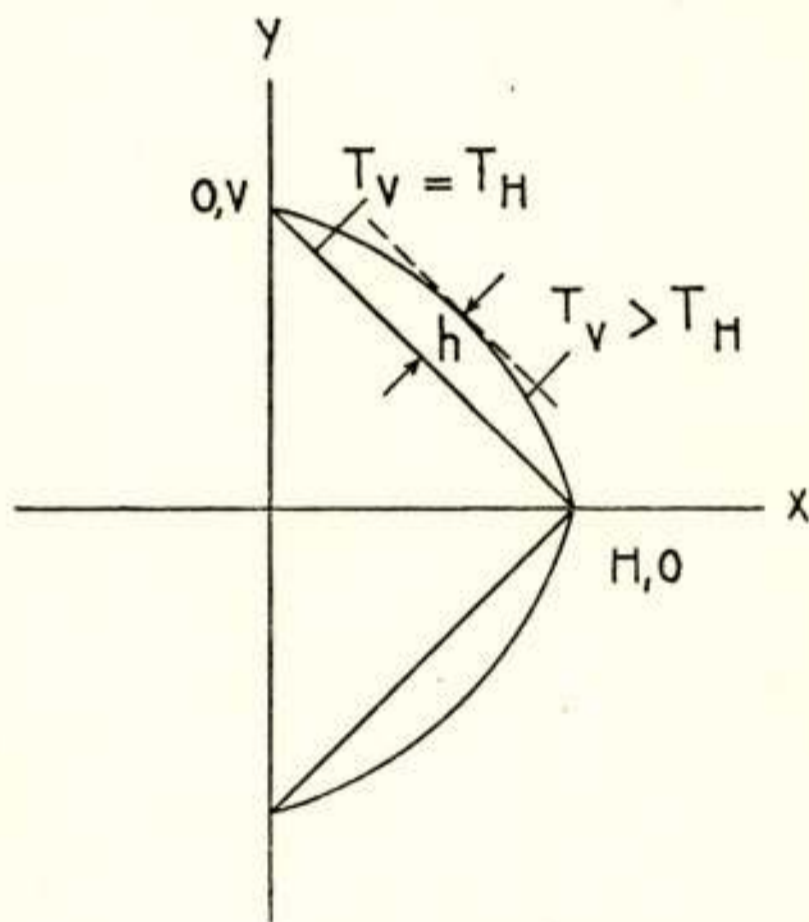
$$h = \frac{H V}{\sqrt{H^2 + V^2}} \left[\left(\frac{T_V}{T_H} \right)^{\frac{T_H}{T_H - T_V}} - \left(\frac{T_V}{T_H} \right)^{\frac{T_V}{T_H - T_V}} \right] =$$

$$= \frac{H V}{\sqrt{H^2 + V^2}} f \left(\frac{T_V}{T_H} \right)$$

Als conditie kan men dus nog stellen dat $\frac{H V}{\sqrt{H^2 + V^2}}$ maximaal moet zijn, waarbij echter als nevenvoorwaarde geldt:

$$\sqrt{H^2 + V^2} = D = \text{constant}$$

wanneer D de maximaal te benutten schermdiameter is. Men



Figuur 10.

toont gemakkelijk aan, dat deze voorwaarden inhouden dat $H = V = \frac{D}{\sqrt{2}}$ gekozen dient te worden. De formule voor h gaat dan over in:

$$h = \frac{D}{2} f \left(\frac{T_V}{T_H} \right)$$

Om de schermdiameter volledig te benutten moet het beeld

dan m.b.v. voorspanningen zoodanig worden verschoven, dat de contour langs een middellijn valt (zie fig. 11 en 12).

c. Nauwkeurigheid

T_H en R_v kunnen met elke gewenschte nauwkeurigheid worden geijkt, zoodat de fout in T_V welke gemaakt wordt bij de oscillografische vergelijking der uitslingerverschijnselen maatgevend is. Men moet hierbij in aanmerking nemen:

1. De niet-lineaire distorsie in B_2 ;
2. De lineaire distorsie in den kring $L_2 C_2$;
3. Deflectiefouten van de kathodestraalbuis;
4. De waarnemingsfout bij instelling van een rechtlijnigen contour.

De fout tengevolge van de eerstgenoemde drie factoren behoeft, wanneer de noodige voorzorgen genomen worden (ruime dimensionneering van den versterkertrap, voldoende demping van den kring $L_2 C_2$, symmetrische besturing van de verticale deflectieplaten en toepassing van een voor asymmetrische besturing gecorrigeerd horizontaal afbuigstelsel), niet meer dan 2 à 3% te bedragen.

De onder 4 genoemde fout kan worden geschat aan de hand van de voor h afgeleide formule:

$$h = \frac{D}{2} f\left(\frac{T_V}{T_H}\right)$$

Differentiatie hiervan geeft:

$$\delta h = \frac{D}{2} \frac{1}{T_H} f'\left(\frac{T_V}{T_H}\right) \delta T_V$$

hetgeen bij limietovergang $T_V \rightarrow T_H$ oplevert:

$$\frac{\delta T_V}{T_V} = \frac{2}{f'(1)} \frac{\delta h}{D} = 2 \varepsilon \frac{\delta h}{D} \quad \varepsilon = 2,72 \dots$$

Nemen wij een schermdiameter $D = 10$ cm. aan, en zou een δh van 0.5 mm. nog juist waarneembaar zijn, zoo wordt de waarnemingsfout in T_V ca. $2\frac{1}{2}\%$, zoodat de totale fout in T_V op ongeveer 5% geschat moet worden.

Dit komt, wanneer men een voldoende groot aantal, ver genoeg uiteenliggende waarnemingen met de methode volgens fig. 8 grafisch extrapoleert, overeen met een fout van dezelfde grootte in R_k en L_k .

III. *Toepassingsgebied der methoden.*

De bandbreedtemethode maakt bij de bepaling van q gebruik van de meting van een frequentieverschil, hetgeen des te nauwkeuriger resultaten geeft naarmate q grooter is. Daarentegen berust de uitslingermethode in wezen op een tijdmeting, welke juist bij kleiner wordende dempingsfactoren nauwkeuriger uitkomsten zal opleveren.

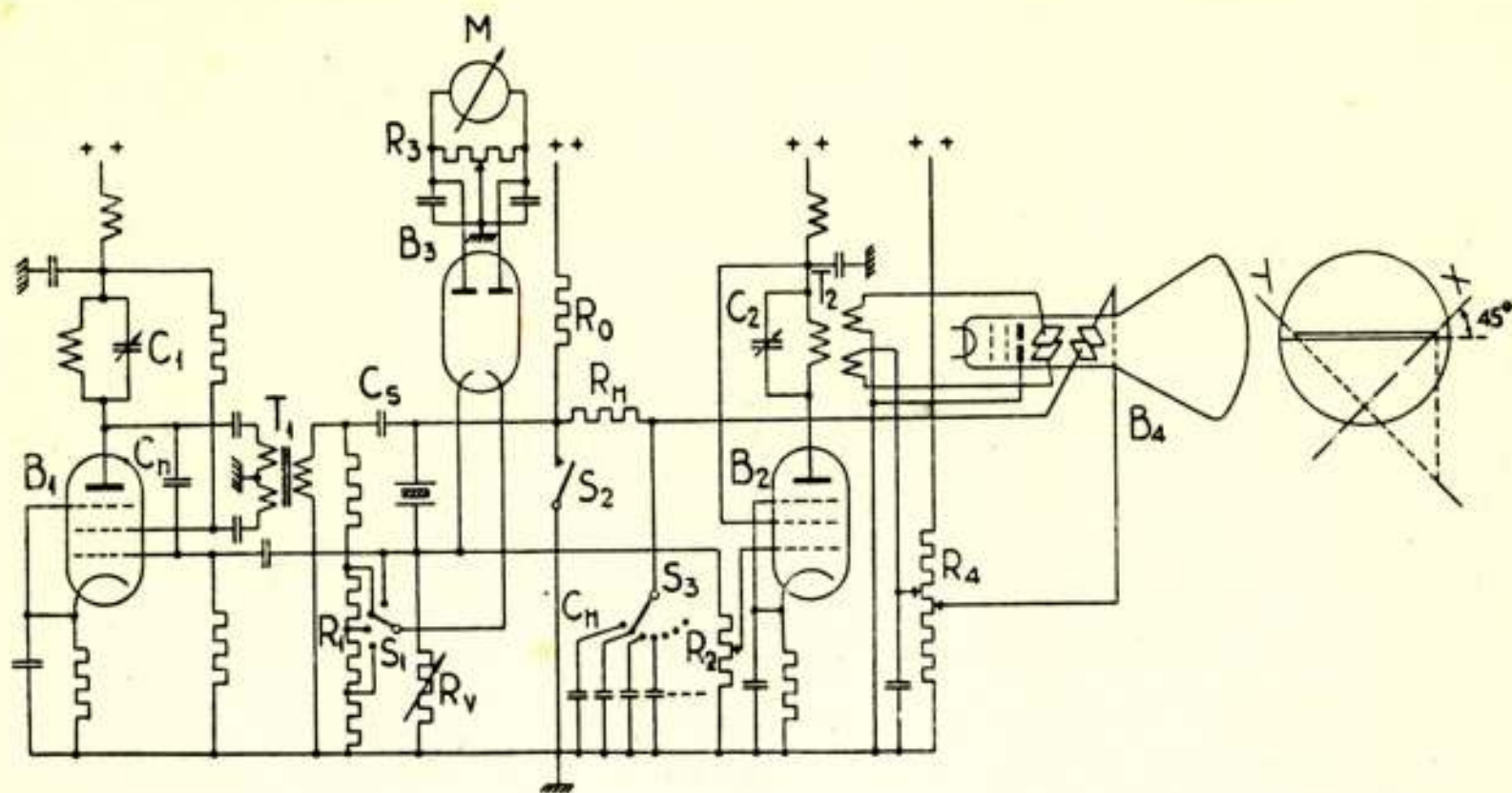
De bandbreedtemethode wordt door het Radiolaboratorium van de P.T.T. dan ook voornamelijk gevolgd bij metingen aan de kristallen voor draaggolftelefoniedoeleinden, waar dempingsfactoren van ca. 20 normaal zijn, terwijl de uitslingermethode toepassing vindt bij het onderzoek van kristallen met zeer geringe demping zoals die, welke worden gebruikt voor het opwekken van standaardfrequenties (vgl. ¹⁾ pag. 300).

Uit een oogpunt van economie biedt de uitslingermethode ongetwijfeld belangrijke voordeelen boven de bandbreedtemethode. De grootere nauwkeurigheid van de bandbreedtemethode komt n.l. alleen tot haar recht wanneer een frequentiemeetinrichting en een frequentiestandaard met een afwijking van hoogstens 1 op 10^7 ter beschikking staan. Bij de uitslingermethode kan deze hulpapparatuur voor de bepaling van q geheel gemist worden, zoodat zij aangewezen schijnt voor laboratoria waar geen frequentiemetingen met voldoende nauwkeurigheid kunnen worden verricht.

IV. *Gecombineerde meetinrichting voor universeel gebruik.*

De combinatie van de schakelingen volgens fig. 5 en fig. 9 heeft geleid tot die van fig. 11, waarmede metingen zoowel volgens de bandbreedte- als volgens de uitslingermethode kunnen worden verricht.

Na hetgeen onder *I, b* en *II, b* gezegd is, zal de werking van deze schakeling geen nadere toelichting behoeven. De constructieve uitvoering is in fig. 12 afgebeeld. Het frequentiebereik is, met het oog op de metingen aan kristallen voor draag-



Figuur 11.

golftelefoniedoeleinden waarvoor het apparaat bestemd is, gekozen van ca. $60-200\text{ kHz}$.

LITERATUUR

- 1) J. J. Vormer, Ned. T. Natuurk., 8, 289, 1941.
- 2) W. G. Cady, Proc. Inst. Radio Engrs., 10, 83, 1922.
- 3) D. W. Dye, Proc. Phys. Soc., 38, 399, 1926.
- 4) C. Zwikker, Ned. T. Natuurk., 8, 311, 1941.
- 5) R. Günther, Hochfrequenztechn. und Elektroakustik, 45, 185, 1935.
- 6) R. Günther, Hochfrequenztechn. und Elektroakustik, 50, 200, 1937.
- 7) W. Herzog, T. F. T., 30, 261, 1941.
- 8) K. Heegner, Jahrb. der drahtl. Telegr. und Teleph., 29, 177, 1927.
- 9) K. S. van Dijke, Proc. Inst. Radio Engrs., 23, 386, 1935.
- 10) S. Chaikin, Z. Hochfr. Techn., 35, 6, 1930.
- 11) H. Gockel, Phys. Z., 37, 657, 1936.

EENIGE BESCHOUWINGEN OVER GEKOPPELDE KRINGEN

door

B. D. H. TELLEGEN

*Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips'
Gloeilampenfabrieken, Eindhoven — Holland.*

*Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radiogenootschap
op 26 Februari 1945.*

Samenvatting.

De theorie van gekoppelde kringen leidt voor de bepaling van de frequenties en de dempingen van de vrije trillingen tot een vierdegraadsvergelijking. Beperken wij ons tot gevallen, waarin de resonantiekromme een kleine relatieve breedte heeft, dan is deze te herleiden tot een tweedegraadsvergelijking, welke eenvoudig in factoren is te ontbinden. Elk dezer factoren bepaalt één van de vrije trillingen. Inductieve of capacatieve koppeling leidt tot een reële koppelingsfactor k , weerstandskoppeling tot een imaginaire k , gemengde koppeling tot een complexe k . Zijn de kringen gelijk gedempt en gelijk afgestemd, dan hebben de factoren bij reële k gelijke dempingen doch verschillende eigenfrequenties, bij imaginaire k gelijke eigenfrequenties doch verschillende dempingen, bij complexe k zowel verschillende eigenfrequenties als verschillende dempingen. Zijn de kringen gelijk gedempt doch verschillend afgestemd, dan heeft dit op de vorm van de resonantiekromme eenzelfde invloed als een vergrooting van k^2 . Zijn de kringen gelijk afgestemd doch ongelijk gedempt, dan wordt k^2 schijnbaar verkleind. Zijn de kringen verschillend afgestemd en ongelijk gedempt, dan wordt k^2 schijnbaar met een complex bedrag gewijzigd. Alle symmetrische resonantiekrommen zijn te teekenen in een enkelvoudige schaar. Tot slot wordt de hoogte van de resonantiekromme onderzocht en worden schakelingen beschouwd, waarbij de kringen gekoppeld zijn over een willekeurige vierpool, welke ook een versterkerbuis mag bevatten.

1. *Inleiding.*

Over gekoppelde kringen is veel geschreven en deze zijn op allerlei wijzen onderzocht. Vele van de in dit artikel bereikte resultaten zijn dan ook reeds vroeger door anderen gevonden, zij het, dat deze vaak op andere wijze werden geformuleerd. Gezien de omvangrijke literatuur op dit gebied hebben wij niet steeds getracht na te gaan, waar bepaalde eigenschappen het eerst naar voren werden gebracht. Veel is te vinden in de overzichten van Wagner¹⁾ en Aiken²⁾. Nadat wij de vergelijkingen voor de gekoppelde kringen hebben opgesteld, wijkt onze methode van behandeling echter op verschillende punten van de tot nu toe gevolgde af en levert in vele gevallen de mogelijkheid bepaalde eigenschappen met een minimum aan rekenwerk naar voren te brengen, wat het fysisch inzicht ten goede kan komen. Tevens zullen wij aan het begrip gekoppelde kringen een ruimere betekenis geven, dan gewoonlijk gedaan wordt, door kringen te beschouwen, die gekoppeld zijn over een willekeurige vierpool, welke ook een versterkerbuis mag bevatten.

Gekoppelde kringen worden in de radiotechniek veelal gebruikt als koppellement tusschen twee buizen en dan vaak aangeduid met de naam van *bandfilter*. Door de eerste buis wordt een bepaalde wisselstroom I aan de eerste kring toegevoerd, terwijl door de tweede kring een wisselspanning V aan de volgende buis wordt afgegeven. Het is de verhouding van deze spanning tot die stroom in afhankelijkheid van de frequentie en in het bijzonder de absolute waarde hiervan, de *resonantiekromme* van het bandfilter, waarvan de kennis voor de toepassingen wordt vereischt.

Voor een willekeurig lineair systeem uit constante elementen heeft deze verhouding de vorm

$$\frac{V}{I} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n},$$

waarin $p = j\omega$, als ω de hoekfrequentie is, en de a 's en b 's alle reëel zijn en bepaald worden door de grootte van de elementen, waaruit het systeem is opgebouwd. De noemer nul gesteld

¹⁾ K. W. Wagner, *Telegr. u. Fernspr. Techn.* **24**, 191, 1935; *Ann. d. Phys.* **32**, 301, 1938.

²⁾ C. B. Aiken, *Proc. Inst. Rad. Eng.* **25**, 230, 1937.

leidt tot een n^e graadsvergelijking in p , waarvan de wortels de *vrije trillingen* van het systeem bepalen. Een imaginaire wortel leidt tot een ongedempte trilling, een complexe wortel tot een gedempte of aangroeiende trilling, een reële wortel tot een aperiodisch verschijnsel. Bestaat het systeem uit één trillingskring, dan is $n = 2$ en is de uitdrukking vrij gemakkelijk te discussieeren. Bestaat het systeem uit twee kringen, dan is $n = 4$; voor het onderzoek is het dan nuttig teller en noemer te ontbinden in twee factoren van de tweede graad. De resonantiekromme van een systeem met twee kringen is dus steeds op te vatten als het product van de resonantiekrommen van twee systemen met één kring.

De ontbinding van een vierdegraadsterm in twee tweedegraadstermen komt neer op het oplossen van een vierdegraadsvergelijking. In de meest algemeene vorm loopt deze oplossing over die van een derdegraadsvergelijking. Deze weg is voor twee gekoppelde kringen gevolgd door Wien ¹⁾, Kiebitz ²⁾ en onlangs door Schneider ³⁾. De resultaten zijn echter weinig overzichtelijk. Door te veronderstellen, dat de kringen weinig gedempt, weinig t.o.v. elkaar verstemd en los gekoppeld zijn, kan men echter benaderde oplossingen vinden, welke eenvoudiger zijn. Deze zijn door Wien via de derdegraadsvergelijking berekend tot in derde benadering en later rechtstreeks op eenvoudiger wijze door Van der Pol ⁴⁾ tot in vierde benadering. Van der Pol wijst erop, dat wij de kern van de bij gekoppelde kringen onder de genoemde omstandigheden optredende verschijnselen reeds met een oplossing tot in tweede benadering goed kunnen beschrijven. Wanneer wij met deze benadering genoegen nemen, kunnen wij van het begin af verschillende vereenvoudigingen invoeren, o.a. in plaats van de frequentie zelf het verschil tusschen de frequentie en de resonantiefrequentie der kringen als variabele gebruiken. Wij kunnen hierdoor bereiken, dat wij voor een enkele kring komen tot uitdrukkingen van de eerste graad en voor gekoppelde kringen tot uitdrukkingen van de tweede graad, welke gemakkelijk in twee factoren van de eerste graad zijn te ontbinden.

¹⁾ M. Wien, Ann. d. Phys. **61**, 151, 1897.

²⁾ F. Kiebitz, Ann. d. Phys. **40**, 138, 1913.

³⁾ P. Schneider, Ann. d. Phys. **41**, 211, 1942.

⁴⁾ B. van der Pol, Physica **6**, 56, 1926.

2. De enkele kring.

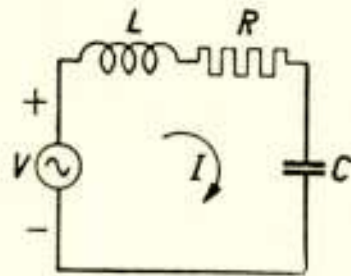
Alvorens de gekoppelde kringen te behandelen willen wij eerst eenige eigenschappen van de enkele kring in herinnering brengen. Voor de in fig. 1 geteekende kring, welke bestaat uit een zelfinductie L , weerstand R , capaciteit C en spanningsbron V in serie, kunnen wij de stroom I berekenen uit

$$\left(j \omega L + R + \frac{I}{j \omega C} \right) I = V. \quad \dots \quad (1)$$

Stellen wij

$$\frac{I}{\sqrt{LC}} = \omega_o,$$

de *resonantiefrequentie* van de kring, en deelen wij beide leden



Figuur 1.

Enkele trillingskring.

door $\omega_o L$, dan krijgen wij

$$\left(j \frac{\omega}{\omega_o} + \frac{R}{\omega_o L} - j \frac{\omega_o}{\omega} \right) I = \frac{V}{\omega_o L}. \quad \dots \quad (2)$$

Stellen wij

$$\frac{R}{\omega_o L} = \delta,$$

de *damping* van de kring, en

$$\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} = \beta,$$

de *verstemming*, dan is hiervoor te schrijven

$$(\delta + j \beta) I = \delta \frac{V}{R}. \quad \dots \quad (3)$$

De stroom wordt dus bepaald door

$$\frac{I}{V} = \frac{I}{R} \cdot \frac{\delta}{\delta + j\beta} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Om de beteekenis van β beter te doorzien voeren wij het verschil $\Delta\omega$ in tusschen de frequentie van de spanningsbron en de resonantiefrequentie van de kring en stellen dus

$$\omega = \omega_o + \Delta\omega.$$

Daarmee wordt, indien $\frac{\Delta\omega}{\omega_o} \ll 1$ is,

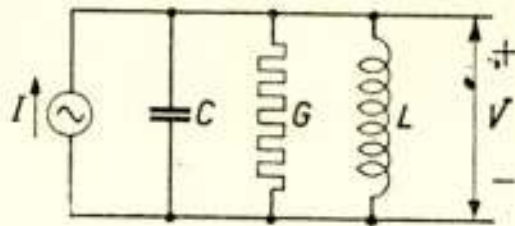
$$\beta = I + \frac{\Delta\omega}{\omega_o} - \frac{I}{\left(I + \frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right)} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_o} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right)^2 + \dots \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_o}.$$

In dat geval is β dus direct evenredig met $\Delta\omega$ en is tevens $\beta \ll I$. Opdat het voornaamste deel van de resonantiekromme bij deze kleine waarden van β ligt, is noodig, dat ook $\delta \ll I$ is, wat wij verder willen veronderstellen. In het algemeen zal R van de frequentie afhangen, daar de verliezen van een kring, die bijv. van de spoelweerstand afkomstig kunnen zijn, niet constant zijn. Vestigen wij onze aandacht alleen op een klein frequentiegebied om de resonantiefrequentie, dan mogen wij hiervan afzien en R en dus ook δ als constant beschouwen. De eenige variabele grootte in (4) is dan dus β , welke alleen in de noemer en tot de eerste graad voorkomt. De absolute waarde van (4) geeft als functie van β de bekende symmetrische resonantiekromme, waarvan de breedte wordt bepaald door δ . Doordat wij ons beperken tot kleine waarden van δ , zal deze breedte in *Hz* vergeleken met de resonantiefrequentie in *Hz*, de *relatieve bandbreedte*, klein zijn.

Bij toepassing van een enkele kring als koppellement tusschen twee buizen hebben wij een iets van fig. 1 afwijkende toestand. De schakeling bestaat dan uit een zelfinductie L , capaciteit C en stroombron I parallel, terwijl de spanning V op de kring wordt afgegeven aan de volgende buis. Het verdient hier aanbeveling de kringverliezen voor te stellen door een geleiding G parallel aan de kring (fig. 2). Door de beperking tot een kleine relatieve bandbreedte kunnen wij ons de verliezen van de kring nl. zoowel door een constante serieweerstand als door een con-

stante parallelgeleiding voorstellen. De inwendige weerstand van de voorafgaande buis kan in G opgenomen gedacht worden. De berekening komt nu geheel overeen met de bovenstaande. Wij kunnen schrijven

$$\left(j \omega C + G + \frac{I}{j \omega L} \right) V = I, \quad \dots \quad (5)$$



Figuur 2.

Andere vorm van een enkele trillingskring.

wat bij deeling van beide leden door $\omega_o C$ en invoering van de demping door thans

$$\frac{G}{\omega_o C} = \delta$$

te stellen, terwijl wij aan ω_o en β dezelfde beteekenis hechten als boven, om te vormen is tot

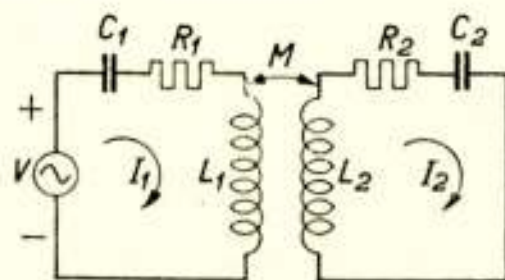
$$\frac{V}{I} = \frac{I}{G} \cdot \frac{\delta}{\delta + j \beta}, \quad \dots \quad (6)$$

wat geheel overeenkomt met (4).

3. Twee gekoppelde kringen.

3a. Inductieve of capacatieve koppeling.

Wij beginnen met te beschouwen twee inductief gekoppelde



Figuur 3.

Twee inductief gekoppelde kringen, reële koppelingsfactor.

kringen, waarvan de eerste een spanningsbron bevat, terwijl wij vragen naar de stroom in de tweede kring (fig. 3). Wij kunnen

voor de beide kringen de vergelijkingen opschrijven en komen dan tot

$$\left. \begin{aligned} \left(j \omega L_1 + R_1 + \frac{I}{j \omega C_1} \right) I_1 - j \omega M I_2 &= V, \\ - j \omega M I_1 + \left(j \omega L_2 + R_2 + \frac{I}{j \omega C_2} \right) I_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Stellen wij

$$\frac{I}{\sqrt{L_1 C_1}} = \omega_1, \quad \frac{I}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_2$$

en deelen de eerste vergelijking door $\omega_1 L_1$ en de tweede door $\omega_2 L_2$, dan krijgen wij

$$\left. \begin{aligned} \left(j \frac{\omega}{\omega_1} + \frac{R_1}{\omega_1 L_1} - j \frac{\omega_1}{\omega} \right) I_1 - j \frac{\omega}{\omega_1} \cdot \frac{M}{L_1} I_2 &= \frac{V}{\omega_1 L_1}, \\ - j \frac{\omega}{\omega_2} \cdot \frac{M}{L_2} I_1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_2} + \frac{R_2}{\omega_2 L_2} - j \frac{\omega_2}{\omega} \right) I_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Stellen wij

$$\frac{R_1}{\omega_1 L_1} = \delta_1, \quad \frac{R_2}{\omega_2 L_2} = \delta_2, \quad \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega} = \beta_1, \quad \frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega_2}{\omega} = \beta_2,$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} \cdot \frac{M}{L_1} = K_1, \quad \frac{\omega}{\omega_2} \cdot \frac{M}{L_2} = K_2,$$

dan is hiervoor te schrijven

$$\left. \begin{aligned} (\delta_1 + j \beta_1) I_1 - j K_1 I_2 &= \delta_1 \frac{V}{R_1}, \\ - j K_2 I_1 + (\delta_2 + j \beta_2) I_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (9)$$

Voor de stroom in de tweede kring volgt hieruit

$$\frac{I_2}{V} = \frac{j}{\sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{K \sqrt{\delta_1 \delta_2}}{(\delta_1 + j \beta_1) (\delta_2 + j \beta_2) + K^2} \quad \dots \quad (10)$$

waarin wij

$$\sqrt{K_1 K_2} = K$$

hebben gesteld.

Indien wij ons beperken tot bandfilters met een kleine relatieve breedte van de resonantiekromme, zijn δ_1 , δ_2 , β_1 , β_2 en ook K alle klein t.o.v. één. Wij behoeven dan alleen in β_1 en β_2 onderscheid te maken tusschen ω , ω_1 en ω_2 en kunnen deze overigens aanduiden door een gemeenschappelijk symbool, waarvoor wij ω_0 kiezen. Voeren wij de verschillen $\Delta\omega_1$ en $\Delta\omega_2$ in tusschen de frequentie van de spanningsbron en de resonantiefrequenties van de kringen door

$$\omega = \omega_1 + \Delta\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega_2$$

te stellen, dan is dus

$$\delta_1 \approx \frac{R_1}{\omega_0 L_1}, \delta_2 \approx \frac{R_2}{\omega_0 L_2}, \beta_1 \approx \frac{2\Delta\omega_1}{\omega_0}, \beta_2 \approx \frac{2\Delta\omega_2}{\omega_0} \text{ en}$$

$$K \approx \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = k,$$

de *koppelingsfactor*. In het kleine gebied om de resonantiefrequenties, waartoe wij onze aandacht bepalen, kunnen wij R_1 en R_2 , dus ook δ_1 en δ_2 , en eveneens K als constant beschouwen. De eenige variabele grootheden in (10) zijn dan β_1 en β_2 en deze komen alleen in de noemer voor.

Wij hebben (10) hier afgeleid voor inductief gekoppelde kringen met serieweerstanden. Wij kunnen echter voor willekeurige gekoppelde kringen steeds een uitdrukking van de vorm (10) afleiden, zoodat deze dus karakteristiek is voor twee gekoppelde kringen. Vormen deze bijv. het koppellement tusschen twee buizen, dan staat een stroombron I parallel aan de eerste kring en wordt de spanning op de tweede kring afgegeven aan de volgende buis. Het verdient dan weer aanbeveling de kringverliezen voor te stellen door geleidingen parallel aan de kringen. Denken wij ons de kringen gekoppeld door een kleine capaciteit tusschen de toppen van de kringen, dan ontstaat de schakeling van fig. 4. De berekening hiervan komt geheel overeen met de bovenstaande, wanneer wij thans de spanningen op

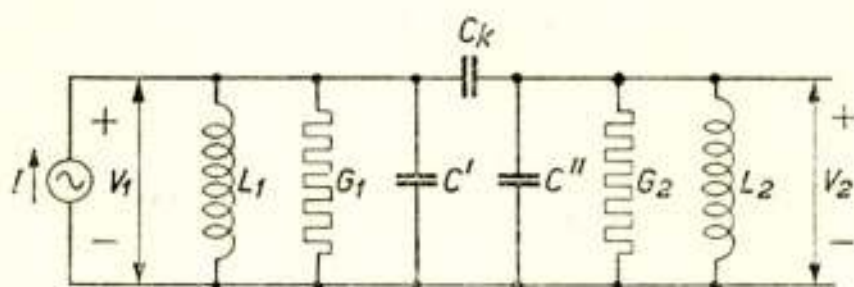
de kringen als de onbekenden beschouwen en opschrijven, dat de som van de stroomen van de eerste kring gelijk aan I en de som van de stroomen van de tweede kring gelijk aan nul is. Wij krijgen dan

$$\left. \begin{aligned} \left\{ j\omega(C' + C_k) + G_1 + \frac{I}{j\omega L_1} \right\} V_1 - j\omega C_k V_2 &= I, \\ -j\omega C_k V_1 + \left\{ j\omega(C'' + C_k) + G_2 + \frac{I}{j\omega L_2} \right\} V_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Vergelijken wij dit met (7), dan blijkt, dat wij $C' + C_k$ en $C'' + C_k$ als de kringcapaciteiten moeten beschouwen. Wij stellen daarom

$$C' + C_k = C_1, \quad C'' + C_k = C_2.$$

Als de eerste kring moeten wij dus het systeem beschouwen,



Figuur 4.

Twee capacitief gekoppelde kringen, reële k .

dat uit fig. 4 ontstaat door de tweede kring kort te sluiten en omgekeerd. Deelen wij de eerste vergelijking door $\omega_1 C_1$, de tweede door $\omega_2 C_2$, stellen

$$\frac{G_1}{\omega_o C_1} = \delta_1, \quad \frac{G_2}{\omega_o C_2} = \delta_2, \quad \frac{C_k}{\sqrt{C_1 C_2}} = k,$$

terwijl wij aan ω_o , ω_1 , ω_2 , β_1 en β_2 dezelfde beteekenis hechten als boven en beperken wij ons weer tot bandfilters met een kleine relatieve bandbreedte, dan komen wij tot

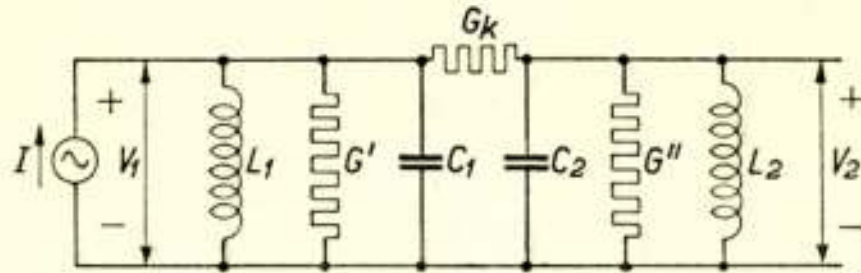
$$\frac{V_2}{I} = \frac{j}{\sqrt{G_1 G_2}} \cdot \frac{k \sqrt{\delta_1 \delta_2}}{(\delta_1 + j\beta_1)(\delta_2 + j\beta_2) + k^2}, \quad \dots \quad (12)$$

wat geheel overeenkomt met (10).

Hadden wij in fig. 4 te doen met inductieve koppeling i.p.v. met capacatieve koppeling, dan komt deze steeds overeen met een groote zelfinductie L_k in plaats van de kleine capaciteit C_k . Wij kunnen hiervoor ook weer (12) afleiden.

3b. Weerstandskoppeling.

Wij kunnen de kringen ook koppelen door een geleiding G_k ,



Figuur 5.

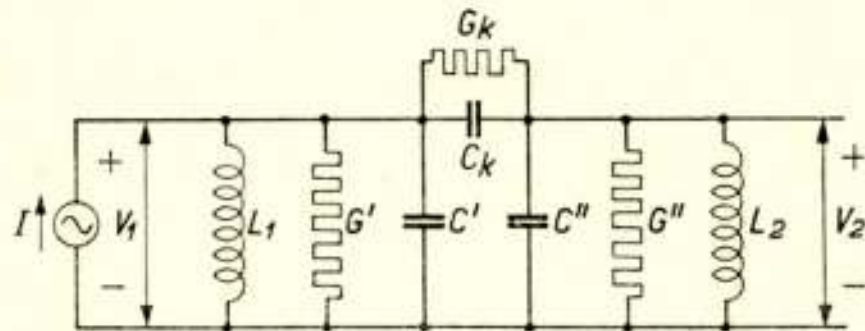
Twee kringen met weerstandskoppeling, imaginaire k .

zooals aangegeven in fig. 5. Volgen wij de boven aangegeven weg, dan komen wij er toe te stellen

$$G' + G_k = G_1, \quad G'' + G_k = G_2, \quad \frac{G_k}{j\omega_o \sqrt{C_1 C_2}} = k, \quad 1)$$

terwijl de andere grootheden hun beteekenis behouden. Wij komen dan ook weer tot (12). *De koppelingsfactor is thans echter imaginair.*

3c. Gemengde koppeling.



Figuur 6.

Twee kringen met gemengde koppeling, complexe k .

Hebben wij zoowel capacatieve als weerstandskoppeling, zooals aangegeven in fig. 6, dan moeten wij

¹⁾ In de literatuur vindt men voor dit geval vaak een definitie overeenkomend met $\frac{G_k}{\sqrt{G_1 G_2}} = k$. G. W. O. Howe, *Wireless Eng.* **9**, 485,

1932, wees er reeds op, dat dit geen juiste maatstaf voor de koppeling zijn kan.

$$\frac{G_k + j \omega_o C_k}{j \omega_o \sqrt{C_1 C_2}} = k$$

stellen en komen dan weer tot (12). De koppelingsfactor is thans complex.

4. Gelijk gedempte en gelijk afgestemde kringen.

De frequentieafhankelijkheid van een bandfilter wordt geheel bepaald door de noemer van (12)

$$N = (\delta_1 + j \beta_1) (\delta_2 + j \beta_2) + k^2 \dots \dots \dots (13)$$

Is k^2 zoo klein, dat wij deze in N mogen verwaarloozen, dan bestaat N uit het product van twee factoren, welke elk met één van de kringen overeenkomen. De vorm van de resonantiekromme is in dat geval die van het product van de resonantiekrommen van de afzonderlijke kringen. Is k^2 niet te verwaarloozen, dan kunnen wij N ook ontbinden in twee factoren, die dan niet meer met de afzonderlijke kringen overeenkomen, doch in verband staan met de vrije trillingen, welke het systeem kan uitvoeren.

Wij beginnen met het eenvoudigste geval, nl. dat, waarbij de beide kringen gelijke dempingen

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta$$

hebben en waarbij deze gelijk afgestemd zijn, zoodat wij

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta$$

kunnen stellen. Dan is

$$N = (\delta + j \beta)^2 + k^2 \dots \dots \dots (14)$$

De koppelingsfactor zal in het algemeen complex zijn, zoodat wij stellen

$$jk = m + jl \dots \dots \dots (15)$$

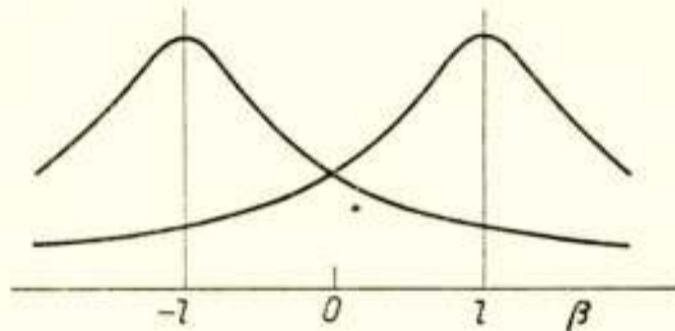
¹⁾ Indien wij het begrip koppelingsfactor nog vrij konden definieeren, zouden wij er de voorkeur aan geven hiervoor de grootheid jk te kiezen, waarmee weerstandskoppeling een reële en inductieve of capacatieve koppeling een imaginaire koppelingsfactor zou krijgen. Om deze reden hebben wij jk en niet k geschreven als de som van een reëel en een imaginair gedeelte. Dit leidt ook tot de elegantste vorm van de vergelijkingen.

4a. Reële k .

Wij beginnen met het geval van reële k , dus $k = l$. Daarmee krijgen wij

$$N = (\delta + j\beta)^2 + l^2 = \{\delta + j(\beta + l)\} \{\delta + j(\beta - l)\}. \quad (16)$$

Deze factoren komen overeen met twee kringen met gelijke dempingen δ , doch waarvan de eigenfrequenties t.o.v. die van de kringen van het bandfilter in tegengestelde zin zijn verschoven, elk over een bedrag l (fig. 7). Veranderen wij l continu van nul af, dan verschuiven deze eigenfrequenties gelijkmatig naar beide zijden. De resulterende resonantiekromme is steeds *symmetrisch* en heeft aanvankelijk één maximum in het midden. Bij toenemende koppeling ontstaan twee maxima ter weerszijden van een in het midden



Figuur 7.

De beide factoren hebben gelijke dempingen doch verschillende eigenfrequenties.

gelegen minimum. Om te vinden bij welke koppeling de grens tusschen deze gevallen ligt, moeten wij de absolute waarde van N^2 opschrijven. Deze bedraagt

$$|N^2| = (\delta^2 + l^2)^2 + 2(\delta^2 - l^2)\beta^2 + \beta^4. \quad (17)$$

De term met β^2 verdwijnt hieruit voor $l^2 = \delta^2$ en daarbij ligt dus de genoemde grens. De resonantiekromme heeft hierbij een vlakke top. De plaats van de bij sterkere koppeling optredende maxima vinden wij door de minima van (17) te bepalen. Deze liggen bij $\beta^2 = l^2 - \delta^2$.

Daar de eigenfrequenties van de factoren uit (16) overeenkomen met de frequenties van de vrije trillingen van het systeem, kunnen wij deze in fig. 4 onmiddellijk aanwijzen, wanneer wij hierin bovendien nog veronderstellen, dat de beide kringen geheel gelijk zijn, dus behalve gelijke afstemmingen en gelijke dempingen ook nog gelijke capaciteiten $C' = C'' = C$ hebben. Bij

de ééne vrije trilling zijn V_1 en V_2 even groot en in fase en voert C_k dus geen stroom. Bij de andere trilling zijn V_1 en V_2 even groot en in tegenfase, zoodat C_k dan wel stroom voert. Denken wij C_k vervangen door twee capaciteiten $2 C_k$ in serie, dan staat er in het laatste geval geen wisselspanning tusschen het verbindingspunt van deze capaciteiten en de onderzijde der kringen, zoodat wij deze punten kunnen verbinden zonder aan de trillingstoestand iets te wijzigen. Wij zien dan, dat de capaciteit, welke de eigenfrequentie in dit geval bepaalt, $C + 2 C_k$ is, terwijl deze voor het geval, dat de spanningen op de kringen in fase zijn, C bedraagt. Veranderen wij de koppeling tusschen de kringen door alleen C_k te veranderen, dan blijft de ééne eigenfrequentie onveranderd, terwijl de andere verschuift. Dit is in tegenstelling met wat wij boven zeiden, waar wij opmerkten, dat bij verandering van l de beide eigenfrequenties evenveel doch in tegengestelde richting verschuiven. De oorzaak hiervan is gelegen in het feit, dat, als wij alleen C_k varieeren, wij niet alleen l doch ook de afstemmingen van de kringen varieeren. Om dit te voorkomen moeten wij immers $C + C_k$ constant houden en dus bij vergrooten van C_k de waarde van C evenveel verkleinen. Hebben wij twee kringen, welke gekoppeld zijn door een wederzijdsche inductie, en veranderen wij de koppeling zonder de zelfinducties van de spoelen te wijzigen, dan krijgen wij wel een gelijke en tegengestelde verschuiving van de eigenfrequenties. Hieruit volgt tevens, dat voor het verkrijgen van een variabele breedte van de resonantiekromme, zooals deze bijv. in middenfrequentversterkers van ontvangtoestellen wordt toegepast, een koppeling door een variabele wederzijdsche inductie beter is dan een variabele capacatieve koppeling.

4b. Imaginaire k .

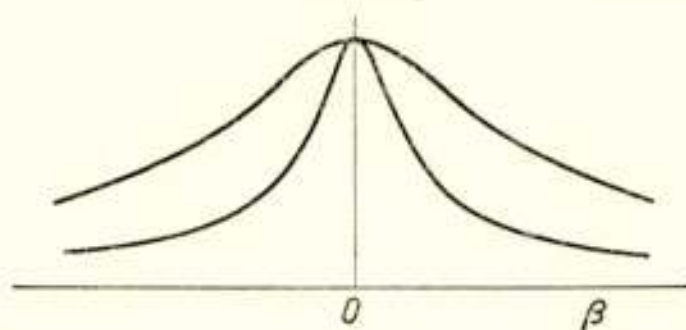
Is k imaginair, dus $jk = m$, dan krijgen wij

$$N = (\delta + j\beta)^2 - m^2 = \{(\delta + m) + j\beta\} \{(\delta - m) + j\beta\}. \quad (18)$$

Deze factoren komen overeen met twee kringen met gelijke eigenfrequenties, doch waarvan de dempingen t.o.v. die van de kringen van het bandfilter in tegengestelde zin zijn gewijzigd, elk met een bedrag m (fig. 8). De resulterende resonantiekromme is ook nu symmetrisch en heeft steeds een maximum in het midden. Bij toenemende m neemt de breedte van de resonantiekromme af, bij $m = \delta$ wordt

deze zelfs oneindig smal, zoodat genereeren op kan treden. Bij de schakeling van fig. 5 kan hieraan niet worden voldaan. Schakelingen, waarbij $m = \delta$ wel mogelijk is, zullen wij beneden bespreken.

Daar de factoren uit (18) overeenkomen met de vrije trillingen van het systeem, kunnen wij deze in fig. 5 onmiddellijk aanwijzen, wanneer wij hierin aannemen, dat de kringen behalve gelijke afstemmingen en gelijke dempingen ook nog gelijke geleidingen $G' = G'' = G$ hebben. Bij de ééne vrije trilling zijn V_1 en V_2 weer even groot en in fase, zoodat G_k geen stroom voert. Bij de andere trilling zijn V_1 en V_2 even groot en in tegenfase, zoodat G_k dan wel stroom voert. Denken wij G_k vervangen door twee geleidingen $2 G_k$ in serie, dan staat er in het laatste geval geen spanning tusschen het verbindingspunt van deze geleidingen en de onderzijde der kringen, zoodat wij deze punten



Figuur 8.

De beide factoren hebben gelijke eigenfrequenties doch verschillende dempingen.

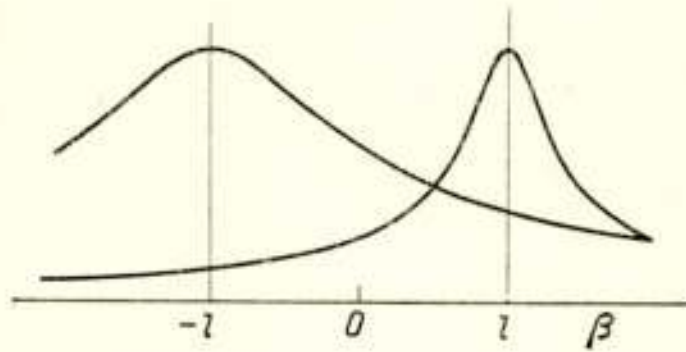
kunnen verbinden zonder aan de trillingstoestand iets te wijzigen. Wij zien dan, dat de geleiding, welke de demping in dit geval bepaalt, $G + 2 G_k$ is, terwijl deze voor het geval, dat de spanningen op de kringen in fase zijn, G bedraagt. Veranderen wij de koppeling tusschen de kringen door alleen G_k te veranderen, dan blijft één van de dempingen van de vrije trillingen onveranderd, terwijl de andere wordt vergroot. Om de boven beschreven toestand te bereiken, waarbij door het vergrooten van de koppeling de dempingen van de vrije trillingen evenveel doch tegengesteld worden gewijzigd, moeten wij bij het vergrooten van G_k de waarde van G evenveel verkleinen, zoodat $G + G_k$ constant blijft.

4c. Complexe k .

Is k complex, dus $jk = m + jl$, dan krijgen wij

$$N = (\delta + j\beta)^2 - (m + jl)^2 = \\ = \{ (\delta + m) + j(\beta + l) \} \{ (\delta - m) + j(\beta - l) \} . . . \quad (19)$$

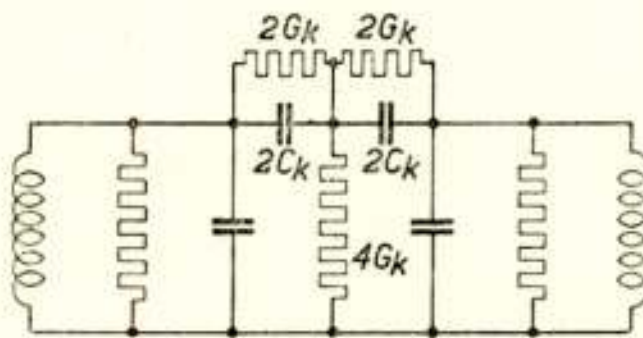
Thans hebben de factoren zoowel verschillende eigenfrequenties als verschillende dempingen (fig. 9). Het gevolg daarvan is, dat hun product een *onsymmetrische* resonantiekromme geeft. De met deze factoren overeenkomende vrije trillingen kunnen wij op overeenkomstige wijze als boven in fig. 6 aanwijzen, wanneer daarin de beide kringen geheel gelijk zijn.



Figuur 9.

De beide factoren hebben zoowel verschillende eigenfrequenties als verschillende dempingen.

De schakeling van fig. 6 kan bijv. optreden, indien de koppelingcapaciteit C_k verliezen heeft. Om in dat geval het ontstaan van een onsymmetrische resonantiekromme te voorkomen kunnen wij de minst gedempte vrije trilling extra dempen. Daartoe splitsen wij C_k en G_k in twee capaciteiten en twee geleidingen $2C_k$

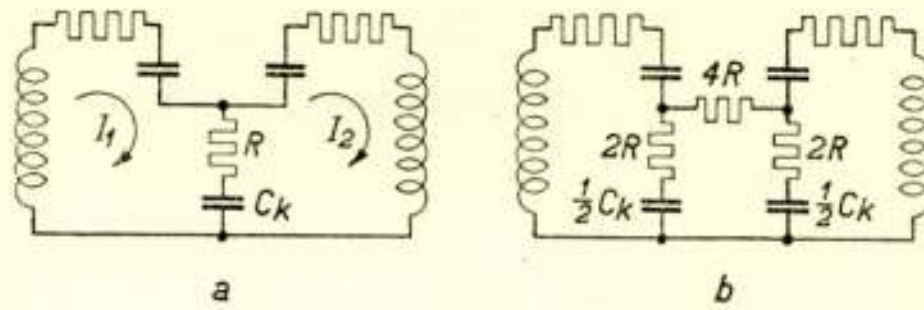


Figuur 10.

Door het splitsen van de koppelingcondensator en het toevoegen van een weerstand is te voorkomen, dat tengevolge van de verliezen van de koppelingcondensator de resonantiekromme onsymmetrisch wordt.

en $2G_k$ in serie en brengen tusschen het verbindingspunt hiervan en de onderzijde der kringen een geleiding $4G_k$ aan (fig. 10). Een soortgelijk geval krijgen wij, indien de kringen gekoppeld zijn over een gemeenschappelijke seriecondensator met verliezen (fig. 11a). Trillen I_1 en I_2 in fase, dan loopt er geen stroom

door de koppelcapaciteit en dempt R dus niet; trillen I_1 en I_2 in tegenfase, dan loopt er wel stroom door en is er dus extra demping. Door de schakeling te wijzigen in die van fig. 11b



Figuur 11.

Door de verliezen van de koppelingscondensator wordt de resonantiekromme bij a onsymmetrisch, terwijl deze bij b weer symmetrisch is gemaakt.

worden de beide vrije trillingen weer even sterk gedempt, waardoor het ontstaan van een onsymmetrische resonantiekromme wordt voorkomen.

5. *Gelijk gedempte doch verschillend afgestemde kringen.*

Hebben de kringen nog wel gelijke dempingen $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, doch zijn hun afstemmingen verschillend, dan kunnen wij de verstemming het beste rekenen van het midden tusschen de afstemmingen van de beide kringen af en dus stellen wij

$$\beta_1 = \beta + \gamma, \quad \beta_2 = \beta - \gamma, \quad \dots \dots \dots (20)$$

waarin 2γ dus een maat is voor de verstemming van de kringen t.o.v. elkaar. Zetten wij dit in (13), dan krijgen wij

$$N = \{\delta + j(\beta + \gamma)\} \{\delta + j(\beta - \gamma)\} + k^2 = (\delta + j\beta)^2 + k^2 + \gamma^2. \quad (21)$$

Vergelijken wij dit met (14), dan zien wij, dat *de verstemming γ op N eenzelfde invloed heeft als een vergrooting van k^2 tot $k^2 + \gamma^2$* . Is k^2 dus nul of positief, dan gedraagt het systeem zich als het product van twee gelijk gedempte doch verschillend afgestemde kringen. Neemt k^2 af, dan blijven de dempingen van de factoren eerst onveranderd, doch de eigenfrequenties gaan naar elkaar toe, totdat $k^2 = -\gamma^2$ geworden is, waarbij de eigenfrequenties van de factoren aan elkaar gelijk zijn geworden. Neemt k^2 daarna nog verder af, dan blijven de eigenfrequenties van

de factoren verder onveranderd, doch worden de dempingen in tegengestelde zin gewijzigd ¹⁾).

De resonantiekromme krijgt een vlakke top bij $k^2 + \gamma^2 = \delta^2$.

6. *Gelijk afgestemde doch ongelijk gedempte kringen.*

Zijn de kringen wel gelijk afgestemd, zoodat wij $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ kunnen stellen, doch zijn hun dempingen verschillend, dan stellen wij

$$\delta_1 = \delta + \varepsilon, \quad \delta_2 = \delta - \varepsilon. \quad (22)$$

De grootheid δ stelt dus de gemiddelde demping $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$, de grootheid 2ε het verschil tusschen de dempingen van de kringen voor. Hiermee wordt (13)

$$N = (\delta + \varepsilon + j\beta)(\delta - \varepsilon + j\beta) + k^2 = (\delta + j\beta)^2 + k^2 - \varepsilon^2. \quad (23)$$

Vergelijken wij dit met (14), dan zien wij, dat *de dempingsongelijkheid ε op N eenzelfde invloed heeft als een verkleining k^2 tot $k^2 - \varepsilon^2$* . Is k^2 dus nul of negatief, dan gedraagt het systeem zich als het product van twee gelijk afgestemde doch ongelijk gedempte kringen. Neemt k^2 toe, dan blijven de eigenfrequenties van de factoren eerst onveranderd, doch de dempingen gaan naar elkaar toe, totdat $k^2 = \varepsilon^2$ geworden is, waarbij de dempingen van de factoren aan elkaar gelijk zijn geworden. Neemt k^2 daarna nog verder toe, dan blijven de dempingen van de factoren verder onveranderd, doch worden de eigenfrequenties in tegengestelde zin verschoven ²⁾. Deze worden dan bepaald door $\beta = \pm \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$, waaruit blijkt, waarop ook door Van der Pol ³⁾ uitdrukkelijk is gewezen, dat de eigenfrequenties bij gekoppelde kringen in sterke mate kunnen afhangen van de dempingen van de kringen en wel van het verschil van de dempingen. Dit is dus in tegenstelling met het gedrag van een enkele kring, waarbij de invloed van een kleine demping op de frequentie van de vrije trilling slechts gering is.

De resonantiekromme krijgt een vlakke top bij $k^2 - \varepsilon^2 = \delta^2$, $k^2 = \frac{1}{2}(\delta_1^2 + \delta_2^2)$.

¹⁾ K. W. Wagner, l.c. blz. 307.

²⁾ M. Wien, l.c. blz. 167.

³⁾ B. van der Pol, l.c. blz. 61.

In de literatuur ¹⁾ vindt men soms de uitspraak, dat ook bij gekoppelde kringen de dempingen in eerste benadering geen invloed op de eigenfrequenties hebben, wat in strijd schijnt met het hier betoogde. De oorzaak van deze afwijking is de volgende. Voor verliesvrije kringen kan men de eigenfrequenties eenvoudig exact berekenen, dus voor willekeurige afstemmingen en voor willekeurige koppeling, omdat daarvoor in de vierdegraadsvergelijking de onevenmachtstermen verdwijnen. Brengt men van deze oplossing uitgaande de verliezen in eerste benadering in rekening, dan vindt men inderdaad, dat de eigenfrequenties zich niet wijzigen. Men heeft dan echter verondersteld, dat de dempingen klein zijn t.o.v. de koppeling, dus ook $\varepsilon \ll k$. In dat geval heeft inderdaad in $\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$ de ε in eerste benadering geen invloed. De belangrijke gevallen, waarin de dempingen wel klein zijn doch de koppelingsfactor en de verstemming van de kringen t.o.v. elkaar eveneens en deze alle van dezelfde grootte-orde zijn, kunnen wij langs deze weg niet benaderen.

7. Ongelijk gedempte en verschillend afgestemde kringen.

Zijn de kringen zoowel ongelijk gedempt als verschillend afgestemd, dan stellen wij

$$\beta_1 = \beta + \gamma, \beta_2 = \beta - \gamma, \delta_1 = \delta + \varepsilon, \delta_2 = \delta - \varepsilon.$$

Hiermee wordt (13)

$$\begin{aligned} N &= \{\delta + \varepsilon + j(\beta + \gamma)\} \{\delta - \varepsilon + j(\beta - \gamma)\} + k^2 = \\ &= (\delta + j\beta)^2 + k^2 - (\varepsilon + j\gamma)^2, \end{aligned} \quad (24)$$

wat overeenkomt met een wijziging van k^2 in $k^2 - (\varepsilon + j\gamma)^2$. In het algemeen zal dit aanleiding geven tot een onsymmetrische resonantiekromme, tenzij $k^2 - (\varepsilon + j\gamma)^2$ juist reëel is, dus als $(m + jL)^2 + (\varepsilon + j\gamma)^2$ reëel is. Dit is het geval als

$$mL + \varepsilon\gamma = 0.$$

De boven besproken bijzondere gevallen hiervan zijn die, waarin zoowel mL als $\varepsilon\gamma$ nul zijn. Om in het algemeenste geval (24) in factoren te ontbinden moeten wij

$$\sqrt{(m + jL)^2 + (\varepsilon + j\gamma)^2} = q + jp$$

berekenen. Daarmee wordt de ontbinding

¹⁾ F. Kiebitz, Jahrb. d. drahtl. Tel. 8, 45, 1914, W. Rogowski, Arch. f. Elektr. 9, 427, 1921, W. Grösser, Arch. f. Elektr. 10, 257, 1921.

$$N = \{(\delta + q) + j(\beta + p)\} \{(\delta - q) + j(\beta - p)\}.$$

8. Universeele resonantiekrommen.

Uit het voorgaande volgt, dat wij ons bij het onderzoek van de mogelijke vormen van de resonantiekrommen kunnen beperken tot het geval van gelijk gedempte en gelijk afgestemde kringen, omdat de andere gevallen hiertoe zijn terug te brengen. Daar de symmetrische resonantiekrommen het belangrijkste zijn, willen wij ons daartoe bepalen en kunnen wij dus bovendien k^2 reëel veronderstellen, welke echter zoowel positief als negatief zijn kan. Geven wij de resonantiekrommen in het midden alle de hoogte één, dan worden deze bepaald door

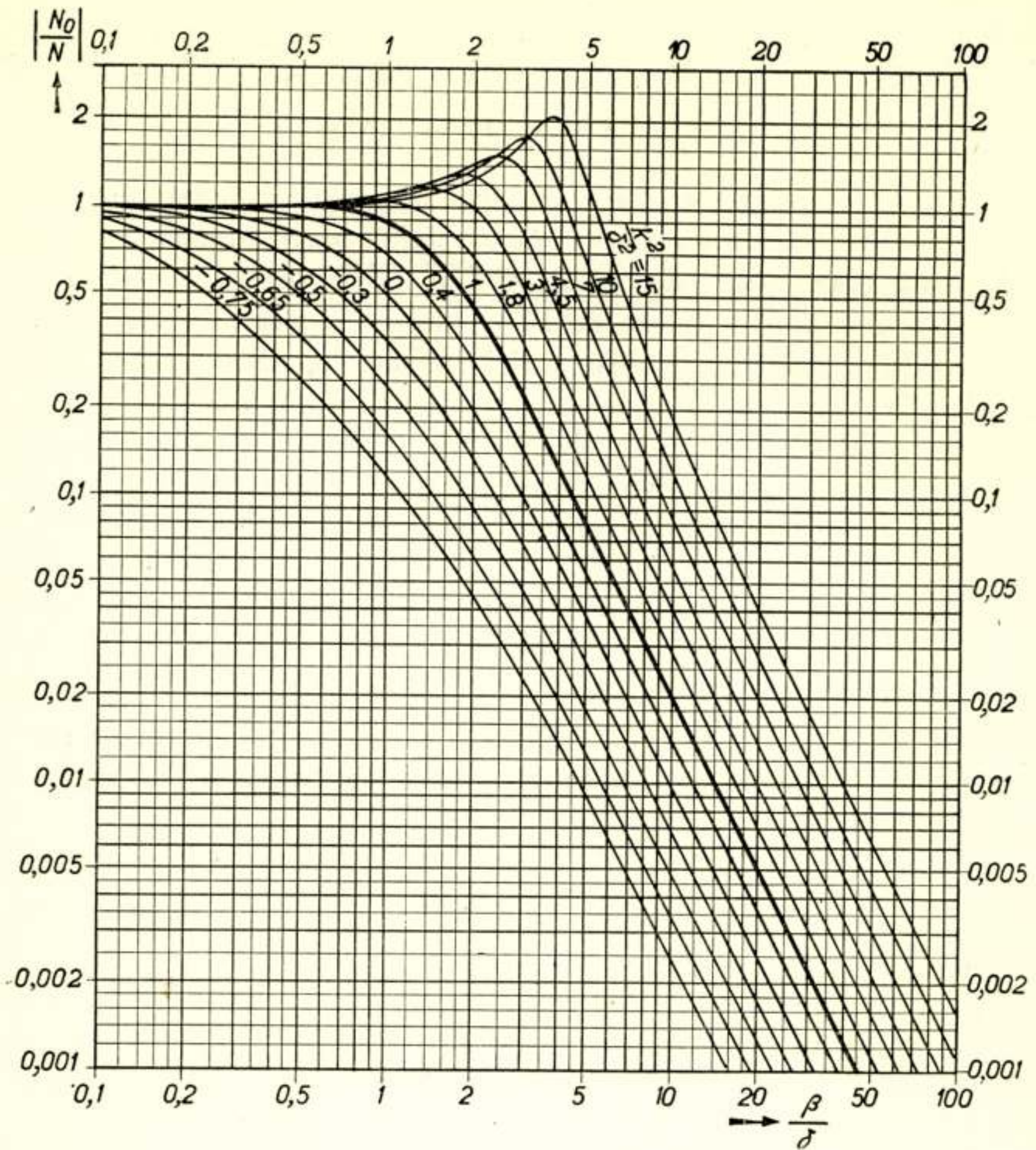
$$\left| \frac{N_o}{N} \right| = \left| \frac{\delta^2 + k^2}{(\delta + j\beta)^2 + k^2} \right| = \frac{\delta^2 + k^2}{\sqrt{(\delta^2 + k^2)^2 + 2(\delta^2 - k^2)\beta^2 + \beta^4}}.$$

Hierin is β de variabele grootte en zijn δ^2 en k^2 als parameters te beschouwen. Door teller en noemer door δ^2 te deelen is hiervoor te schrijven

$$\left| \frac{N_o}{N} \right| = \frac{1 + \frac{k^2}{\delta^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{\delta^2}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{k^2}{\delta^2}\right)\frac{\beta^2}{\delta^2} + \frac{\beta^4}{\delta^4}}}, \dots \quad (25)$$

waardoor $\frac{\beta}{\delta}$ de variabele grootte is geworden en er slechts één parameter $\frac{k^2}{\delta^2}$ is overgebleven. De krommen zijn dus te teekenen als een enkelvoudige schaar, wat gedaan is in fig. 12. Zijn de kringen gelijk gedempt doch ongelijk afgestemd, dan blijven de krommen juist, indien wij k^2 vervangen door $k^2 + \gamma^2$. Zijn de kringen gelijk afgestemd doch ongelijk gedempt, dan moeten wij k^2 vervangen door $k^2 - \varepsilon^2$ en stelt δ de gemiddelde demping $\frac{I}{2}(\delta_1 + \delta_2)$ voor ¹⁾.

¹⁾ Deze mogelijkheid om alle symmetrische resonantiekrommen in een enkelvoudige schaar te teekenen werd in 1931 voor inductieve of capacatieve koppeling aangegeven en uitgevoerd door Ir. F. H. Stieltjes, welke toen aan dit laboratorium was verbonden.



Figuur 12.

Universele symmetrische resonantiekrommen
van bandfilters met een kleine relatieve bandbreedte.

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad \beta = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \quad \gamma = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}.$$

$$\delta_1 = \frac{R_1}{\omega_0 L_1} \quad \text{of} \quad \frac{G_1}{\omega_0 C_1}, \quad \delta_2 = \frac{R_2}{\omega_0 L_2} \quad \text{of} \quad \frac{G_2}{\omega_0 C_2}, \quad \delta = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2).$$

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad \text{bij inductieve,} \quad \frac{C_k^2}{C_1 C_2} \quad \text{bij capacatieve,} \quad \frac{G_k^2}{-\omega_0^2 C_1 C_2} \quad \text{bij weerstandskoppeling.}$$

De krommen zijn zonder meer van toepassing bij gelijk gedempte en gelijk afgestemde kringen.

Bij gelijk gedempte doch ongelijk afgestemde kringen moet k^2 vervangen worden door $k^2 + \gamma^2$.

Bij gelijk afgestemde doch ongelijk gedempte kringen moet k^2 vervangen worden door $k^2 - \varepsilon^2$.

9. *De hoogte van de resonantiekromme.*

Wij hebben ons tot nu toe alleen bezig gehouden met de noemer N van (12), welke de vorm van de resonantiekromme bepaalt. Daarnaast is ook de hoogte van de resonantiekromme van belang, omdat deze bij toepassing van het systeem als koppellement tusschen twee buizen de versterking bepaalt. Willen wij de invloed van de koppelingsfactor op de hoogte van de resonantiekromme bestudeeren, dan kunnen wij ons niet tot N bepalen, daar k ook in de teller voorkomt, en moeten wij dus $\frac{k}{N}$ onderzoeken.

Bij *gelijk gedempte en gelijk afgestemde kringen* geldt in het midden, bij $\beta = 0$,

$$\frac{k}{N} = \frac{k}{\delta^2 + k^2}.$$

Voor reële k is dit het grootst bij $k^2 = \delta^2$, dus bij *dezelfde koppeling* als voor het verkrijgen van een resonantiekromme met een vlakke top.

Bij *gelijk gedempte doch verschillend afgestemde kringen* wordt bij $\beta = 0$

$$\frac{k}{N} = \frac{k}{\delta^2 + \gamma^2 + k^2}.$$

Voor reële k is dit het grootst bij $k^2 = \delta^2 + \gamma^2$, dus bij een *vastere koppeling* dan voor het verkrijgen van een vlakke top.

Bij *gelijk afgestemde doch ongelijk gedempte kringen* wordt bij $\beta = 0$

$$\frac{k}{N} = \frac{k}{\delta^2 - \varepsilon^2 + k^2}.$$

Voor reële k is dit het grootst bij $k^2 = \delta^2 - \varepsilon^2 = \delta_1 \delta_2$, dus bij een *lossere koppeling* dan voor het verkrijgen van een vlakke top.

Om de hoogte van de resonantiekromme nader te onderzoeken kunnen wij (12) ook schrijven in de vorm

$$\frac{V_2}{I} = \frac{j}{\omega_0 \sqrt{C_1 C_2}} \cdot \frac{k}{(\delta_1 + j\beta_1)(\delta_2 + j\beta_2) + k^2} \quad . \quad . \quad (26)$$

Bij een gegeven vorm van de resonantiekromme is het voor het bereiken van een groote hoogte dus in de eerste plaats van belang C_1 en C_2 klein te maken. Bij het versterken van zeer breede frequentiebanden, zooals bijv. voor televisie van belang is, worden C_1 en C_2 dan ook gelijk gehouden aan de buiscapaciteiten vermeerderd met de onvermijdelijke, tot een minimum beperkte bedradings- en spoelcapaciteiten. Daarnaast blijft het bij een gegeven vorm van de resonantiekromme, dus van N , gewenscht een groote koppelingsfactor te kunnen gebruiken. Nu willen wij doorgaans een zooveel mogelijk rechthoekige resonantiekromme hebben, wat wij kunnen benaderen door een symmetrische resonantiekromme met een vlakke top. Zijn de kringen gelijk afgestemd en gelijk gedempt, dan moeten wij dus $k = \delta$ kiezen. Hebben de kringen wel gelijke demping, doch zijn zij verstemd, dan zagen wij boven, dat deze verstemming eenzelfde invloed heeft op de vorm van de resonantiekromme als een vergroting van de koppelingsfactor. Willen wij de vorm van de resonantiekromme niet wijzigen door de verstemming, dan zullen wij de koppelingsfactor dus moeten verkleinen, wat nadeelig is voor de hoogte. Stemmen wij de kringen wel gelijk af, doch geven wij ze een verschillende demping, waarbij wij de gemiddelde demping constant laten, dan zagen wij boven, dat dit op de vorm van de resonantiekromme eenzelfde invloed heeft als een verkleining van de koppelingsfactor. Willen wij de vorm van de resonantiekromme niet wijzigen door de ongelijke demping, dan zullen wij de koppelingsfactor dus moeten vergrooten, wat voordelig is voor de hoogte. Wij kunnen met dit ongelijk maken van de dempingen zoo ver gaan, tot één kring een demping nul en de andere een demping 2δ heeft gekregen ¹⁾. Hierdoor wordt k^2 schijnbaar met een bedrag δ^2 verminderd. Oorspronkelijk was $k^2 = \delta^2$, zoodat wij thans $k^2 = 2\delta^2$ moeten maken om de vorm van de resonantiekromme te behouden. De koppelingsfactor en daardoor de hoogte van de resonantiekromme zijn hierdoor dus $\sqrt{2}$ maal groter geworden.

10. *Koppeling over een vierpool.*

Dat de algemeenste mogelijkheid van koppeling tusschen twee kringen eveneens tot de onderzochte uitdrukkingen leidt, blijkt,

¹⁾ Deze schakeling wordt vermeld door H. A. Wheeler, Proc. Inst. Rad. Eng. 27, 429, 1939, fig. 6.

als wij twee kringen onderzoeken, welke over een willekeurige vierpool zijn gekoppeld (fig. 13). Daar wij een systeem met slechts twee kringen willen onderzoeken, bevat de vierpool geen ongeveer op de resonantiefrequenties van die kringen afgestemde kring. Wij behoeven daarom niet op de frequentieafhankelijkheid van de vierpool te letten en kunnen de vergelijkingen ervan geven in de vorm

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 - Y_{21} V_2 \\ I_2 &= -Y_{12} V_1 + Y_{22} V_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

waarin wij de Y 's als constant kunnen beschouwen. Daar wij ook de gevallen willen onderzoeken, waarin de vierpool een versterkerbuis bevat, zal in het algemeen $Y_{12} \neq Y_{21}$ zijn. Gaan wij

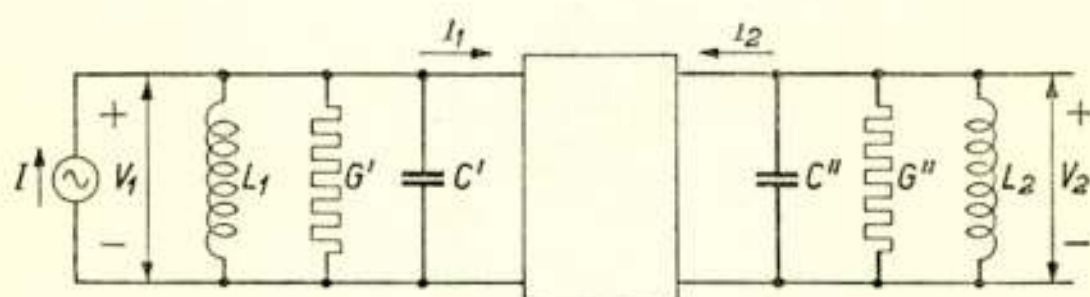


Fig. 13.

Twee kringen gekoppeld over een vierpool.

hiermee de vergelijkingen van het systeem opschrijven, dan komen wij tot

$$\left. \begin{aligned} \left(j\omega C' + G' + \frac{I}{j\omega L_1} + Y_{11} \right) V_1 - Y_{21} V_2 &= I \\ -Y_{12} V_1 + \left(j\omega C'' + G'' + \frac{I}{j\omega L_2} + Y_{22} \right) V_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (28)$$

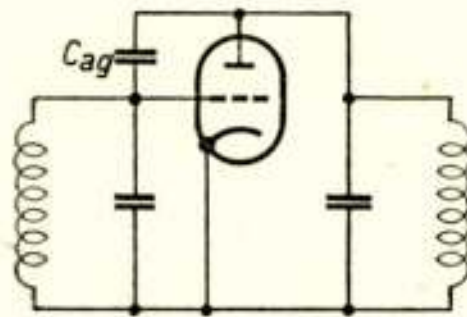
Wij zien, dat Y_{11} en Y_{22} alleen de damping en de afstemming van de kringen beïnvloeden, zoodat wij deze daarin op kunnen nemen door G' , C' , G'' en C'' te wijzigen in G_1 , C_1 , G_2 en C_2 . De grootheden Y_{12} en Y_{21} veroorzaken de koppeling tusschen de kringen en wij komen thans tot

$$k^2 = \frac{Y_{12} Y_{21}}{-\omega_o^2 C_1 C_2},$$

dus in het algemeen tot een complexe koppelingsfactor. Berekenen wij $\frac{V_2}{I_1}$, dan komen wij tot een uitdrukking, welke alleen

van (12) verschilt door een factor $\sqrt{\frac{Y_{12}}{Y_{21}}}$ in de teller. De grootte N , welke de vorm van de resonantiekromme bepaalt, blijft ongewijzigd en dus gelden alle over N gegeven beschouwingen ook thans nog.

Voorbeelden van koppelingen, waarbij $Y_{12} \neq Y_{21}$ is, krijgen wij, als wij twee kringen koppelen over een versterkerbuis, terwijl nog eenige terugkoppeling aanwezig is. Wordt deze bijv. veroorzaakt door de roosteranodecapaciteit C_{ag} van de buis (fig. 14), dan wordt $Y_{12} = -S + j\omega_o C_{ag}$ en $Y_{21} = j\omega_o C_{ag}$, waarin S de steilheid van de buis is. Daar doorgaans $\omega_o C_{ag} \ll S$ leidt

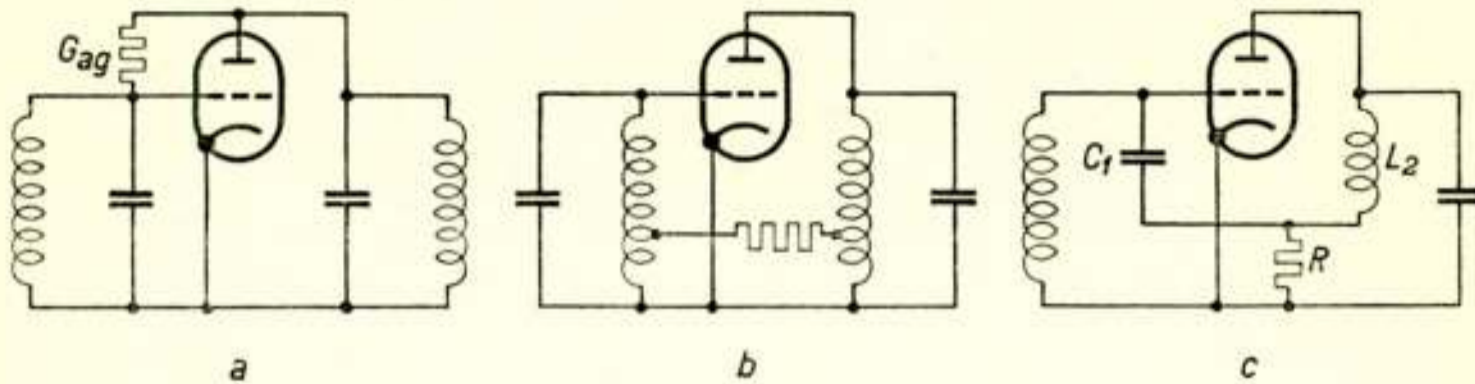


Figuur 14.

Twee kringen gekoppeld over een buis met roosteranodecapaciteit, k^2 zuiver imaginair.

dit tot een zuiver imaginaire k^2 , dus tot een complexe k , zoodat de resonantiekromme hierdoor in het algemeen onsymmetrisch wordt. Koppelen wij terug over een geleiding G_{ag} tusschen anode en rooster in plaats van over een capaciteit (fig. 15a), dan wordt $Y_{12} = -S + G_{ag}$ en $Y_{21} = G_{ag}$. Daar reeds een $G_{ag} \ll S$ een flinke koppeling kan geven, leidt dit tot een positieve k^2 , dus tot een reële k , zoodat wij op deze wijze ook resonantiekrommen met een vlakke top kunnen krijgen. Om dit practisch uit te voeren kan men geen weerstand tusschen rooster en anode aanbrengen, daar dit tot zeer groote waarden voor deze weerstand zou leiden (met kringen met een impedantie bij afstemming van $100\,000\ \Omega$ en een buis met een steilheid van 1 mA/V krijgen wij een vlakke top bij een roosteranodeweerstand van $10\text{ M}\Omega$), zoodat dan de onvermijdelijke eigencapaciteit van deze weerstand een overwegende invloed zou krijgen. Door de weerstand echter op één of op beide kringen te tappen (fig. 15 b),

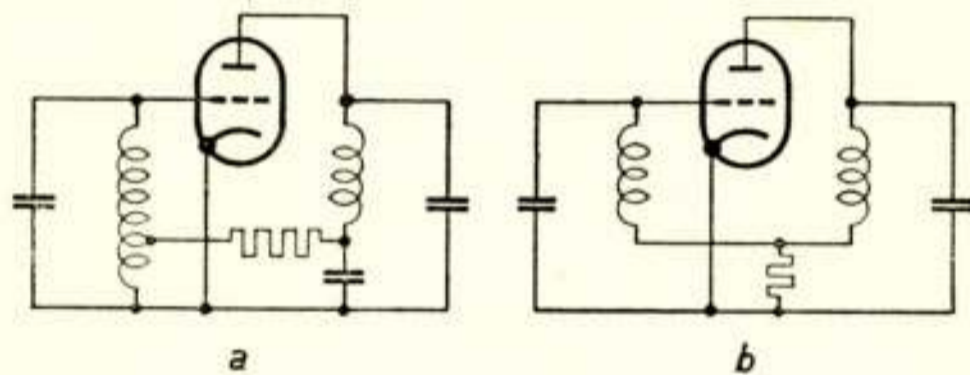
waardoor wij deze een lagere waarde moeten geven, is dit bezwaar te ondervangen. Eenzelfde resultaat kunnen wij bereiken door de beide kringen te koppelen over een kleine gemeenschappelijke serieweerstand (fig. 15c), wat het gemakkelijkst is



Figuur 15.

Twee kringen gekoppeld over een buis met weerstand tusschen rooster en anode (*a*) en twee hiermee gelijkwaardige schakelingen (*b* en *c*), reële k .

aan te toonen door de ster C_1, L_2, R om te vormen in een driehoek, waardoor tusschen rooster en anode een geleiding $C_1 R/L_2$ ontstaat. Door de fase van de terugkoppeling om te keeren (fig. 16a en b) ontstaat een systeem met negatieve k^2 , dus imaginaire k . Wordt de koppeling sterk genoeg gemaakt, dan zal genereeren optreden.



Figuur 16.

Twee kringen gekoppeld over een buis en een weerstand op zoodanige wijze, dat genereeren op kan treden; imaginaire k .

Bij al deze schakelingen met versterkerbuizen veroorzaken de koppel-elementen een veel geringere demping of verstemming van de kringen, dan bij de eerder behandelde schakelingen zonder versterkerbuizen.

DISCUSSIE

Ir. L. A. W. van der Lek merkt op, dat de dualiteit tusschen de behandeling van de inductief gekoppelde ketens van fig. 3 met behulp van impedanties en die van de capaciteef gekoppelde ketens van fig. 4 met behulp van admittanties niet geheel volkomen is, doordat bij de inductieve koppeling L_1 en L_2 direct in de figuur voorkomen, terwijl bij de capaciteef koppeling C_1 en C_2 afgeleide grootheden voorstellen.

Ir. B. D. H. Tellegen antwoordt, dat deze asymmetrie opgeheven kan worden door de inductieve koppeling te vervangen door drie in ster geschakelde zelfinducties met de waarden $L_1 - M$, $L_2 - M$ en M . In dat geval zijn L_1 en L_2 gelijk aan de som van twee zelfinducties van de ster, geheel overeenkomend met het feit, dat bij de capaciteef koppeling van fig. 4 C_1 en C_2 gelijk zijn aan de som van twee capaciteiten van de daarin voorkomende driehoek.

Ir. W. C. Vis: Welke zijn de oorzaken voor de typische verschillen tusschen de bandfilters in de ontvangertechniek (gekoppelde kringen) en die uit de draaggolftelefonie (constant- k filters),

- a) wat betreft de beschouwings- en ontwerpmethoden, waarbij bijv. in het eerste geval uitdrukkelijk de verliezen in aanmerking worden genomen, terwijl Zobel juist veronderstelt, dat er geen dissipatie aanwezig is,
- b) wat betreft de toepassing, waarbij voor hogere aischen in de ontvangertechniek practisch nooit een constant- k bandfilter wordt gebruikt?

Ir. T.: De verschillen tusschen de beschouwingen over bandfilters in de radiotechniek en in de telefoontechniek hebben een historische achtergrond. Voor de radiotechniek vormt de trillingskring bestaande uit één zelfinductie en één capaciteit het uitgangspunt, voor de telefoontechniek is dit de leiding met verdeelde zelfinductie en capaciteit. Daar komt bij, dat in de radiotechniek steeds versterkerbuizen worden gebruikt, waardoor de verschillende deelen van de apparatuur van elkaar worden gescheiden, zoodat deze niet op elkaar terugwerken. In de telefoontechniek werden aanvankelijk geen buizen toegepast, waardoor alle deelen sterk op elkaar terugwerken.

Waar in de radiotechniek systemen met twee gekoppelde kringen als koppellement tusschen twee buizen werden gebruikt, lag het voor de hand de beschouwingen, welke voor een enkele kring werden gehouden, hiertoe uit te breiden. Daar de buizen in eerste benadering oneindig groote ingangs- en uitgangsweerstanden hebben, moeten de verliezen van de kringen van het begin af in de beschouwing worden opgenomen, daar deze de eigenschappen van het bandfilter in hooge mate bepalen. In de telefoontechniek werden bij het ontstaan van ingewikkelder systemen de uit de theorie der leidingen bekende grootheden tot deze uitgebreid. Het begrip van de verliesvrije leiding aan ingang en uitgang afgesloten door zijn golfweerstand, waardoor reflecties worden vermeden, deed het begrip van

de verliesvrije vierpool ontstaan, welke aan ingang en uitgang eveneens goed moet zijn afgesloten om „reflecties” te vermijden. Door de systemen zoo op te bouwen, dat „reflecties” worden vermeden, wordt het ook pas mogelijk ingewikkelde systemen te beheerschen niettegenstaande de sterke terugwerking, welke de deelen hiervan op elkaar uitoefenen. Deze beschouwingen, welke ook hun stempel op de filtertheorie hebben gedrukt, hebben bewezen vruchtbaar te zijn. Men kan zich echter de vraag stellen, of deze na de intrede van de versterkerbuis in de telefoontechniek steeds noodzakelijk zullen blijven.

De tegenstelling tusschen een tweekringsbandfilter en ingewikkelder filters is niet zoo groot als die tusschen de bijbehorende theorieën. Wanneer wij, zooals fig. 4 aangeeft, de verliezen van de kringen voorstellen door parallelweerstand, krijgt het bandfilter de vorm van een verliesvrije vierpool tusschen twee weerstanden¹⁾. Ook bij de ingewikkelder filters zijn de afsluitweerstandes essentieel, daar pas bij de juiste afsluiting de gewenschte filterwerking wordt verkregen. Uit het onder nr. 9 gegeven voorbeeld blijkt echter, dat het onder omstandigheden van voordeel kan zijn het verliesvrije bandfilter slechts aan één zijde af te sluiten met een weerstand. Dit levert dus een geval, dat niet past bij de gangbare opvattingen uit de filtertheorie.

Wat de toepassingen betreft, kunnen wij in omroepontvangers met twee middenfrequentbandfilters elk bestaande uit twee gekoppelde kringen aan practisch alle selectiviteitseischen voldoen, zoodat er geen aanleiding is hiervoor ingewikkelder en dus duurder filters te gebruiken. Doordat de zijbanden van naburige stations over elkaar vallen, zou men van grootere selectiviteit ook weinig profijt kunnen trekken. In de draaggolftelefonie zijn de eischen veel hooger, omdat hierbij de toegelaten onderlinge storing van naburige kanalen zeer klein is. Aan de filters wordt bijv. de eisch gesteld, dat zij, bij een doorlaatbreedte van 3200 Hz , op 800 Hz daarbuiten 60 db verzwakken. Hiervoor is toepassing van een groot aantal bijv. zeven trillingskringen noodzakelijk. Daar deze veelal direct, zonder tusschenkomst van versterkerbuizen, met elkaar gekoppeld worden, heeft men hiervoor andere ontwerpmethoden ontwikkeld dan voor systemen met slechts twee gekoppelde kringen.

¹⁾ R. Feldtkeller, *Telegr. u. Fernspr. Techn.* **27**, 38, 1938 heeft zoo de begrippen van de filtertheorie hierop kunnen toepassen.