

HET BEPALEN VAN DE INTEGRATIECONSTANTEN
BIJ DE BEREKENING VAN IN- EN
UITSCHAKELVERSCHIJNSELEN

door

B. D. H. TELLEGEN

*Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken,
Eindhoven, Nederland*

*(Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radiogenootschap
op 22 Maart 1946)*

SAMENVATTING

Een methode wordt ontwikkeld om bij een netwerk, dat een spanningsbron v bevat, onder welks invloed in een bepaalde tak een stroom i vloeit, bij het optreden van discontinuïteiten in v of zijn afgeleiden de daardoor in i en zijn afgeleiden ontstaande discontinuïteiten te berekenen met behulp van de differentiaalvergelijking, welke het verband tusschen i en v aangeeft.

1. *Probleemstelling*

Indien in een electrisch netwerk, opgebouwd uit lineaire constante elementen, een spanningsbron v werkt, onder welks invloed in een bepaalde tak een stroom i vloeit, bestaat tusschen i en v een verband, dat uitgedrukt wordt door een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten van de vorm

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) i = (b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_n) v. (1)$$

Hierin is $D = d/dt$, de differentiaaloperator, terwijl de a 's en b 's bepaald worden door de grootte van de elementen, waaruit het netwerk is opgebouwd. Eén of meer van de a 's en b 's kunnen de waarde nul hebben.

Verandert v sinusvormig met de tijd met een hoekfrequentie ω , dan bestaat er een oplossing voor i , welke eveneens sinusvormig verandert met de hoekfrequentie ω . Wij kunnen deze

vinden in complexe vorm door in (1) D te vervangen door $j\omega$ en i en v door hun complexe waarden I en V . Wij komen dan tot

$$I = \frac{b_0 (j\omega)^n + b_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + b_n}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} V. \quad (2)$$

Omgekeerd kunnen wij, indien (2) bekend is, weer tot de differentiaalvergelijking terugkeeren door eerst beide leden van (2) met de noemer te vermenigvuldigen en daarna $j\omega$ te vervangen door D , en I en V door de momenteele waarden i en v . Vaak is dit een eenvoudiger weg om tot de differentiaalvergelijking te komen, dan door deze rechtstreeks af te leiden.

In (1) beschouwen wij nu v als functie van de tijd gegeven, dus eveneens het geheele rechterlid van (1), terwijl i gevraagd wordt. Voor i is (1) dus een niet-homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. De theorie van deze vergelijkingen leert, dat de algemeene oplossing daarvan bestaat uit de algemeene oplossing van de homogene vergelijking vermeerderd met een particuliere integraal van de niet-homogene vergelijking en dus in het algemeen de vorm heeft

$$i = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} + \text{particuliere integraal}, \quad (3)$$

waarin de p_k 's de wortels zijn van de vergelijking

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4)$$

en de A_k 's de n integratieconstanten vormen.

Ons probleem is thans na te gaan, hoe deze integratieconstanten kunnen worden bepaald. Stel, dat v als functie van de tijd gegeven is na een zeker aanvangstijdstip, dat wij met $t=0$ zullen aanduiden, dan zijn de stroomen en spanningen in het netwerk pas geheel bepaald, wanneer ook de energieverdeling in het netwerk bij $t=0$ gegeven is, wat neerkomt op de grootte en richting van de spanningen op de condensatoren en van de stroomen door de spoelen. Deze vormen tezamen de z.g. aanvangsvoorwaarden en het aantal integratieconstanten zal dus gelijk zijn aan het aantal onafhankelijke gegevens, dat noodig is om de energieverdeling in de aanvangstoestand te bepalen. Dit aantal zal dus hoogstens gelijk kunnen zijn aan de som van het aantal condensatoren en spoelen; in sommige gevallen zal het echter kleiner zijn, bijv. indien het netwerk drie con-

condensatoren in driehoek of drie spoelen in ster bevat, daar de energieverdeeling in elk van deze drietallen elementen door slechts twee onafhankelijke gegevens wordt bepaald.

In plaats van te vragen naar de stroom door een bepaalde tak kunnen wij ook vragen naar de spanning op een bepaalde tak, in plaats van een spanningsbron kan het netwerk ook een stroombron bevatten. Deze vragen leiden tot aan (2) analoge differentiaalvergelijkingen, zoodat alle beschouwingen zonder meer ook daarop van toepassing zijn.

2. Eerste methode

Een eerste methode om de integratieconstanten te bepalen bestaat uit het uitdrukken van de spanningen op de condensatoren en van de stroomen door de spoelen in de gevraagde stroom i en de gegeven spanning v en hun afgeleiden. Dit is uit de schakeling van het netwerk in het algemeen mogelijk

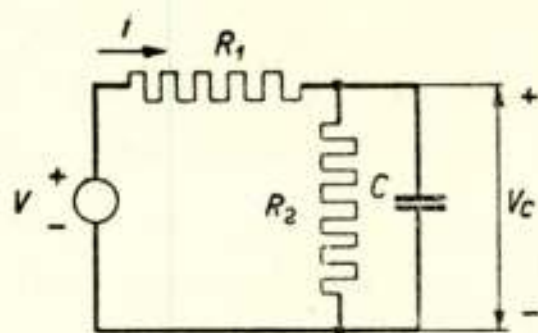


Fig. 1

zonder te behoeven integreeren. Substitueeren wij voor i in deze uitdrukkingen de waarde (3) en stellen wij hierin daarna $t = 0$, dan komen wij tot n onafhankelijke lineaire vergelijkingen voor de integratieconstanten, waaruit deze kunnen worden bepaald.

Wij zullen deze methode toelichten aan een zeer eenvoudig voorbeeld. Stel, wij vragen in het netwerk van fig. 1 naar de stroom i , welke ontstaat onder invloed van de spanningsbron v . Met de complexe wisselstroommethode is af te leiden, dat

$$I = \frac{j\omega C R_2 + 1}{j\omega C R_1 R_2 + R_1 + R_2} V. \quad (5)$$

De hieraan ten grondslag liggende differentiaalvergelijking is dus

$$(C R_1 R_2 D + R_1 + R_2) i = (C R_2 D + 1) v. \quad (6)$$

De algemeene oplossing hiervan heeft de gedaante

$$i = A e^{-\alpha t} + f(t), \quad (7)$$

waarin $\alpha = (R_1 + R_2)/CR_1R_2$ en $f(t)$ een particuliere integraal voorstelt.

Om de integratieconstante A te bepalen moeten wij uit fig. 1 de spanning op de condensator, v_c , uitdrukken in i en v en daarna hierin voor i de waarde (7) substitueeren. Wij krijgen zoo

$$v_c = v - R_1 i = v - AR_1 e^{-\alpha t} - R_1 f(t).$$

Voor $t = 0$ wordt dit

$$v_{c0} = v_0 - AR_1 - R_1 f(0),$$

waarin v_{c0} en v_0 de waarden van v_c en v voorstellen bij $t = 0$. Voor A volgt hieruit

$$A = \frac{v_0 - v_{c0}}{R_1} - f(0). \quad (8)$$

3. Tweede methode

Een tweede methode om de integratieconstanten te bepalen bestaat uit het uitdrukken van i en zijn eerste $n - 1$ afgeleiden in de spanningen op de condensatoren, de stroom door de spoelen en v en zijn afgeleiden. Ook dit is uit de schakeling van het netwerk in het algemeen mogelijk zonder te behoeven integreeren. Substitueeren wij deze uitdrukkingen in (3) en de $n - 1$ daaruit door differentiatie naar t afgeleide vergelijkingen en stellen wij hierin daarna $t = 0$, dan komen wij weer tot n onafhankelijke lineaire vergelijkingen voor de integratieconstanten, waaruit deze kunnen worden bepaald.

Passen wij dit toe op het bovenstaande voorbeeld, dan kunnen wij uit fig. 1 direct aflezen, dat

$$i = \frac{v - v_c}{R_1}.$$

Substitueeren wij dit in (7) en stellen $t = 0$, dan krijgen wij

$$\frac{v_0 - v_{c0}}{R_1} = A + f(0),$$

wat overeenkomt met (8).

Het onderscheid tusschen de eerste en de tweede methode wordt grooter bij netwerken, die leiden tot differentiaalvergelijkingen van hoogere dan de eerste orde.

4. *Derde methode*

Bij de beide tot nu toe besproken methoden moeten wij uit de schakeling van het netwerk n grootheden berekenen, wat soms vrij bewerkelijk kan zijn. Wij willen nu laten zien, dat in vele gevallen alle gegevens, welke noodig zijn om de integratieconstanten uit de aanvangsvoorwaarden te bepalen, in de differentiaalvergelijking zijn vervat en hierop een derde methode baseeren om deze constanten te berekenen. Wij behoeven daarbij, na het opstellen van de differentiaalvergelijking, dus niet meer aan het netwerk te denken en kunnen daardoor veelal op kortere wijze ons doel bereiken.

Laten wij beginnen het geval te beschouwen, waarbij in de aanvangstoestand geen energie in het netwerk aanwezig is. Om in te zien, dat het geheele verloop van i dan verder door de differentiaalvergelijking wordt bepaald, stellen wij ons voor, dat v ook vóór $t = 0$ gegeven is en wel dat v dan steeds de waarde nul heeft en dat vóór $t = 0$ geen energie in het netwerk aanwezig is, zoodat dan ook $i = 0$ is. Springt v bij $t = 0$ plotseling op de waarde v_0 , dan zal (op één uitzondering na, waarop wij beneden in § 4,3 terugkomen) direct na de sprong van v nog geen energie in het netwerk aanwezig zijn, zoodat wij voor de berekening van i na $t = 0$ tot het oorspronkelijk gestelde probleem komen. Nu zal i zoowel voor $t < 0$ als voor $t > 0$ aan de differentiaalvergelijking moeten voldoen; bij $t = 0$ treden echter discontinuïteiten op, zoodat daarbij niet meer van het voldoen aan de differentiaalvergelijking kan worden gesproken. Laten wij v echter niet met een sprong toenemen doch geleidelijk gedurende een korte tijd, welke wij de schakeltijd zullen noemen, dan zal i ook gedurende deze schakeltijd aan de differentiaalvergelijking moeten voldoen, zoodat i dan voor alle waarden van t aan één differentiaalvergelijking moet voldoen. De aanvangsvoorwaarden worden hierbij gevormd door de eisch $i = 0$ voor $t < 0$. Voor het berekenen van i voor $t > 0$ zullen wij verder dus aan de differentiaalvergelijking genoeg moeten hebben en wij zullen daarnaast dus niet meer op de schakeling van het netwerk behoeven te letten. Laten wij tenslotte de schakeltijd tot nul naderen, dan komen wij tot de oplossing van het eigenlijke probleem.

Is in de aanvangstoestand wel energie in het netwerk aanwezig en is deze gegeven door de spanningen op de condensatoren en de stroomen door de spoelen bij $t = 0$, dan moeten

wij voor het bepalen van de integratieconstanten wel gebruik maken van de schakeling van het netwerk. In vele gevallen ligt het probleem echter anders en treedt in een netwerk, waarin een spanningsbron v werkt, onder invloed waarvan in een bepaalde tak een bekend verloopende stroom i vloeit, bij $t = 0$ een sprong in v op en wordt gevraagd te berekenen, hoe i daarna verloopt. Het sluiten van een schakelaar leidt bijv. tot zoo'n sprong, want een schakelaar is op te vatten als een spanningsbron, waarvan de grootte gelijk is aan de spanning op de schakelaar, welke spanning bij het sluiten dus plotseling nul wordt (het openen van een schakelaar is beter op te vatten als een sprong van een stroombron, want een schakelaar komt ook overeen met een stroombron, waarvan de grootte gelijk is aan de stroom door de schakelaar, welke stroom bij het openen dus plotseling nul wordt). Denken wij de sprong in v weer vervangen door een geleidelijke verandering in een korte schakeltijd, dan zal i voor alle waarden van t weer aan één differentiaalvergelijking moeten voldoen, terwijl de aanvangsvoorwaarden worden gevormd door de eisch, dat i voor $t < 0$ het bekende verloop heeft. Ook nu zullen wij voor het bepalen van de integratieconstanten dus niet meer op de schakeling van het netwerk behoeven te letten.

Nog iets algemeener kunnen wij het volgende zeggen. Als het verband tusschen i en v door een differentiaalvergelijking van de n^e orde in i wordt uitgedrukt en v als gegeven wordt beschouwd en bij $t = 0$ een sprong maakt, zal de algemeene uitdrukking voor i zoowel voor $t < 0$ als voor $t > 0$ n integratieconstanten bevatten. Denken wij de sprong vervangen door een geleidelijke verandering in een korte schakeltijd, dan zal de algemeene uitdrukking voor i slechts één stel van n integratieconstanten bevatten, zoodat er dus n betrekkingen moeten bestaan tusschen de integratieconstanten voor $t < 0$ en die voor $t > 0$. Wij willen ons nu afvragen, welke vorm deze betrekkingen aannemen, indien wij de schakeltijd tot nul laten naderen.

4.1. *De continuïteitseischen*

Bij het tot nul naderen van de schakeltijd zal in v een sprong ontstaan en v dus discontinu worden; $\int v dt$, waarvoor wij soms $D^{-1} v$ zullen schrijven, zal echter continu blijven en eveneens $D^{-2} v$, $D^{-3} v$, enz. Wij denken in (2) nu aan een v met een eindige schakeltijd, integreeren $(n + 1)$ -maal naar de tijd en

laten de schakeltijd daarna tot nul naderen. Dan krijgen wij

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) D^{-n-1} i = (b_0 D^{-1} + b_1 D^{-2} + \dots + b_n D^{-n-1}) v. \quad (9)$$

Op grond van het bovenvermelde is het rechterlid van (9) een continue functie van de tijd. In het linkerlid kunnen wij $D^{-n-1} i$ als de afhankelijk veranderlijke beschouwen. De theorie der differentiaalvergelijkingen leert, dat er dan oplossingen van (9) bestaan, welke, als $a_0 \neq 0$, n -maal continu differentieerbaar zijn, zoodat $D^{-n-1} i$ en zijn eerste n afgeleiden alle continu zullen zijn.

Wij schrijven (2) nu in de vorm

$$D^n (a_0 i - b_0 v) + D^{n-1} (a_1 i - b_1 v) + \dots + (a_n i - b_n v) = 0. \quad (10)$$

Integreeren wij dit n -maal naar de tijd bij een eindige schakeltijd en laten deze daarna tot nul naderen, dan ontstaat

$$(a_0 i - b_0 v) + D^{-1} (a_1 i - b_1 v) + \dots + D^{-n} (a_n i - b_n v) = 0.$$

Van alle termen, behalve de eerste, weten wij, dat deze continu zijn, dus moet ook de eerste term continu zijn:

$$(a_0 i - b_0 v) \text{ moet continu zijn.} \quad (11)$$

Dat wil zeggen, dat, als v bij $t = 0$ een sprong maakt, dus bijv. een bedrag Δv toeneemt, i bij $t = 0$ eveneens een sprong moet maken en wel een bedrag Δi moet toenemen bepaald door $a_0 \Delta i - b_0 \Delta v = 0$.

Integreeren wij (10) $(n-1)$ -maal, dan ontstaat

$$D (a_0 i - b_0 v) + (a_1 i - b_1 v) + \dots + D^{-n+1} (a_n i - b_n v) = 0.$$

Van alle termen, behalve de eerste twee, weten wij, dat deze continu zijn, dus moet ook de som van de eerste twee termen continu zijn:

$$D (a_0 i - b_0 v) + (a_1 i - b_1 v) \text{ moet continu zijn.} \quad (12)$$

Door telkens eenmaal minder te integreeren komen wij tot meer grootheden, die continu moeten zijn, en tenslotte, door (10) eenmaal te integreeren, tot:

$$D^{n-1} (a_0 i - b_0 v) + D^{n-2} (a_1 i - b_1 v) + \dots + (a_{n-1} i - b_{n-1} v) \text{ moet continu zijn.} \quad (13)$$

Wij hebben hiermee de n gezochte betrekkingen gevonden. Ook als v continu is en Dv een sprong maakt, of als v en Dv continu zijn en D^2v een sprong maakt, enz. blijven deze alle juist. Wij vatten het resultaat als volgt samen.

Laten v en i twee functies van t zijn, waartusschen een verband bestaat, dat gegeven wordt door een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten van de gedaante

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) i = (b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_n) v.$$

Doorloopen v en i elk een oneindige rij van functies, welke tot een limietfunctie naderen, dan zullen voor deze limiet de n grootbeden

$$(a_0 i - b_0 v), D(a_0 i - b_0 v) + (a_1 i - b_1 v), \dots$$

$\dots, D^{n-1}(a_0 i - b_0 v) + D^{n-2}(a_1 i - b_1 v) + \dots + (a_{n-1} i - b_{n-1} v)$ continue functies van t zijn, indien $a_0 \neq 0$ en $\int v dt$ in de limiet continu blijft.

Maakt v of een afgeleide van v bij $t = 0$ een sprong, dan is uit de voorwaarde „ $a_0 i - b_0 v$ continu” het verband tusschen i vóór en na de sprong te bepalen, hiermee uit de voorwaarde „ $D(a_0 i - b_0 v) + a_1 i - b_1 v$ continu” het verband tusschen Di vóór en na de sprong, enz. Is i voor $t < 0$ bekend, dan zullen hierdoor de waarden van i en de eerste $n - 1$ afgeleiden direct na de sprong in v worden bepaald. Hebben wij in het bijzonder te doen met een spanningsbron v , welke bij $t = 0$ geschakeld wordt in een systeem, waarin geen energie aanwezig is, dan zullen direct na het schakelen $a_0 i - b_0 v$, $D(a_0 i - b_0 v) + a_1 i - b_1 v$, enz. nog nul zijn. Door evenals bij de boven besproken tweede methode de gevonden waarden voor i en zijn eerste $n - 1$ afgeleiden bij $t = 0$ te substitueeren in (3) en de $n - 1$ daaruit door differentiatie naar t afgeleide vergelijkingen voor $t = 0$, komen wij weer tot n onafhankelijke lineaire vergelijkingen voor de integratieconstanten.

Passen wij dit toe op het voorbeeld van fig. 1, waarin volgens (6) $a_0 = CR_1 R_2$ en $b_0 = CR_2$, dan komen wij tot:

$$CR_1 R_2 i - CR_2 v \text{ moet continu zijn bij } t = 0,$$

dus tot $\Delta i = \Delta v / R_1$, wat ook direct uit fig. 1 is af te lezen.

4.2. Discontinuïteiten van verschillende orde

Wij kunnen de beteekenis van de differentiaalvergelijking voor de schakeltijd ook nog op de volgende wijze onderzoeken.

Indien v gedurende de schakeltijd snel monotoon toeneemt, zal Dv een scherp maximum vertoonen, D^2v een scherp maximum gevolgd door een nulpunt en daarna een scherp minimum, enz. (fig. 2). Nadert de schakeltijd tot nul, dan naderen deze tot discontinuïteiten van verschillende geaardheid: in v ontstaat een

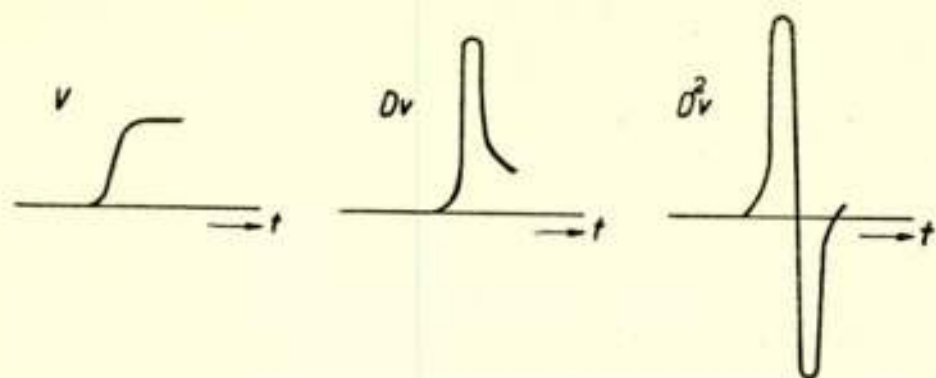


Fig. 2

sprong, in Dv wordt het maximum oneindig groot, terwijl het oppervlak eindig blijft, d.w.z. in Dv ontstaat een stoot, in D^2v ontstaat een discontinuïteit, die wij van de tweede orde zullen noemen, terwijl wij een stoot een discontinuïteit van de eerste en een sprong een discontinuïteit van de nulde orde zullen noemen. Voor i geldt hetzelfde: in i ontstaat een sprong, in Di een stoot, enz.

Letten wij nu op de differentiaalvergelijking in de vorm (10), dan kunnen wij zeggen, dat de discontinuïteiten van de hoogste orde alleen in de eerste term zitten. Daar deze niet door discontinuïteiten van lagere orde kunnen worden opgeheven, moet $a_0 i - b_0 v$ continu zijn, want dan wordt $D^n (a_0 i - b_0 v)$ een discontinuïteit van hoogstens de $(n-1)^e$ orde. De discontinuïteiten van de hoogste orde, die dan nog kunnen voorkomen, zijn die van de $(n-1)^e$ orde en deze kunnen alleen van de eerste twee termen afkomstig zijn, waarvoor wij kunnen schrijven:

$$D^{n-1} \{D(a_0 i - b_0 v) + (a_1 i - b_1 v)\}.$$

Omdat deze discontinuïteiten van de $(n-1)^e$ orde elkaar moeten opheffen, moet $D(a_0 i - b_0 v) + (a_1 i - b_1 v)$ continu zijn, en zoo vervolgens. Wij komen zoo dus tot dezelfde voorwaarden, als wij boven hebben gevonden. Wij kunnen deze dus ook opvatten als de voorwaarden, dat achtereenvolgens de discontinuïteiten van de n^e , de $(n-1)^e$, ..., de eerste orde elkaar opheffen.

4,3. Het geval $a_0 = 0$

Is $a_0 = 0$ en $b_0 \neq 0$, dan stellen wij $i = Dq$, waarin dus q de

lading voorstelt, welke door de bewuste tak is gevloeid. Daarmee gaat de differentiaalvergelijking over in

$$(a_1 D^n + a_2 D^{n-1} + \dots + a_n D) q = (b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_n) v. \quad (14)$$

Is $a_1 \neq 0$, dan zijn hierop de gehouden beschouwingen weer toe te passen, wat leidt tot:

$$(a_1 q - b_0 v) \text{ moet continu zijn, enz.} \quad (15)$$

Maakt v een sprong, dan zal ook q een sprong maken, zoodat in $i = Dq$ een stoot zal ontstaan.

Netwerken van deze aard zijn bijv. netwerken, waarbij de spanningsbron v ligt in een maas, welke alleen uit condensatoren bestaat, en waarbij wij vragen naar de stroom door een van deze condensatoren. Maakt v een sprong, dan zullen de spanningen op de condensatoren ook sprongen maken en in de stroomen door de condensatoren zullen dus stooten ontstaan. Bevat het netwerk aanvankelijk geen energie, dan zal de elektrische energie direct na de sprong van v dus niet meer nul kunnen zijn.

Een zeer eenvoudig voorbeeld krijgen wij uit het netwerk van fig. 1, indien wij daarin $R_1 = 0$ maken. Daarmee gaat (6), indien wij tevens $i = Dq$ stellen, over in

$$R_2 Dq = (C R_2 D + 1) v. \quad (16)$$

Met (15) volgt hieruit, dat $R_2 q - C R_2 v$ continu moet zijn bij $t = 0$, dus dat $\Delta q = C \Delta v$, wat wij voor het geval $R_1 = 0$ ook direct uit fig. 1 kunnen aflezen.

Een overeenkomstig geval kunnen wij krijgen, indien wij een netwerk met een stroombron beschouwen, waarbij in iedere maas, welke de stroombron bevat, een spoel voorkomt. Een voorbeeld hiervan wordt gegeven door het in § 5 te onderzoeken netwerk van fig. 3. Maakt de stroombron een sprong, dan zullen de stroomen door de spoelen ook sprongen maken en in de spanningen op de spoelen zullen dus stooten ontstaan. Bevat het netwerk aanvankelijk geen energie, dan zal de magnetische energie direct na de sprong van de stroombron dus niet meer nul kunnen zijn.

Het geval $a_0 = 0, a_1 = 0, b_0 \neq 0$ kan in netwerken zonder electronenbuizen niet voorkomen¹⁾, wel in netwerken met electronenbuizen. Is $a_2 \neq 0$, dan kunnen wij dit behandelen door $i = D^2 s$ te stellen.

¹⁾ Zie bijv. W. Nijenhuis en F. L. Stumpers, *Physica* **8**, 289, 1941.

4,4. Het geval $\int v dt$ discontinu

Treedt in v geen sprong, doch een stoot op, dan zal $\int v dt$ een sprong vertoonen, dus discontinu zijn. Stellen wij in dit geval $v = D\varphi$, dan zal φ een sprong maken en dus $\int \varphi dt$ continu zijn. Door $v = D\varphi$ te substitueeren in de differentiaalvergelijking komen wij tot de onderzochte gevallen terug. Treedt in v een discontinuïteit van de tweede orde op, dan kunnen wij stellen $v = D^2\psi$ en zal $\int \psi dt$ continu zijn.

5. Periodieke spanningsbron met discontinuïteiten

Wij kunnen van het gevondene ook gebruik maken voor het berekenen van de periodieke stroomen in een netwerk onder invloed van een periodieke spanningsbron, welke discontinuïteiten vertoont. Als voorbeeld hiervan zullen wij onderzoeken een versterkerbuis met steilheid S en hooge inwendige weerstand, aan welks rooster een zaagtandvormige spanning v wordt toegevoerd en waarbij gevraagd wordt naar de stroom i door een in de anodeketen opgenomen spoel, waaraan een tweede spoel parallel is geschakeld. Vervangen wij de versterkerbuis door een stroombron Sv , kan komen wij tot de in fig. 3 geteekende

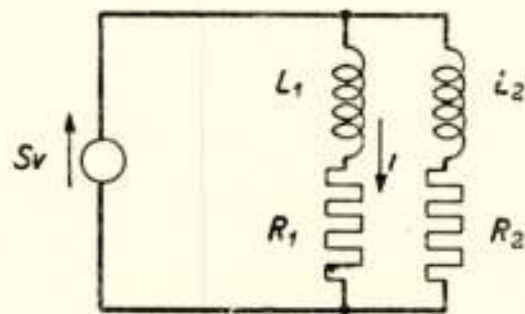


Fig. 3

schakeling. Hierin stellen L_1 en R_1 de zelfinductie en de weerstand voor van de spoel, waardoor wij de stroom willen berekenen, en L_2 en R_2 de overeenkomstige grootheden van de tweede spoel. Uit de figuur is af te lezen

$$I = \frac{j\omega L_2 + R_2}{j\omega (L_1 + L_2) + R_1 + R_2} SV,$$

zoodat de differentiaalvergelijking luidt

$$\{(L_1 + L_2) D + R_1 + R_2\} i = (L_2 SD + R_2 S) v. \quad (17)$$

Verloopt v zaagtandvormig, zooals in fig. 4 is aangegeven, dan

is voor $-\pi < \omega t < \pi$, $v = E \omega t / \pi$ en is de algemeene oplossing van de differentiaalvergelijking daarvoor

$$i = A e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{SE}{\pi} \omega t + \frac{L_2 R_1 - L_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \frac{SE}{\pi} \omega, \quad (18)$$

zooals gemakkelijk kan worden geverifieerd. A is hierin de integratieconstante.

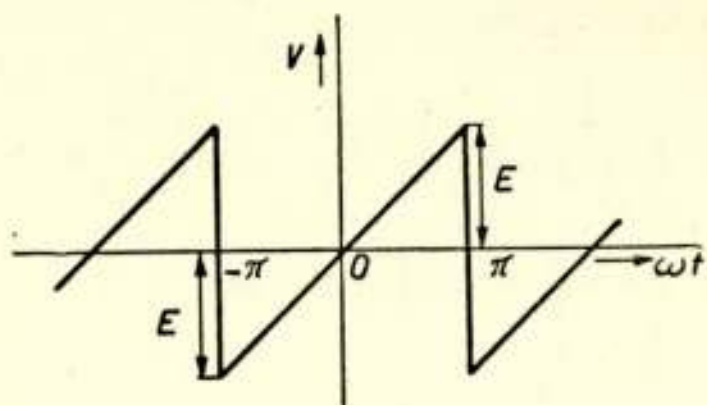


Fig. 4

Bij $\omega t = \pi$ maakt v een sprong. Uit de differentiaalvergelijking volgt op grond van de boven ontwikkelde theorie, dat daarbij $(L_1 + L_2) i - L_2 S v$ continu moet blijven. Vragen wij naar de periodieke oplossing voor i , dan zal i na de sprong van v bij $\omega t = \pi$ dezelfde waarde moeten hebben als bij $\omega t = -\pi$, dus komen wij tot

$$\{(L_1 + L_2) i - L_2 S v\}_{\omega t = \pi} = \{(L_1 + L_2) i - L_2 S v\}_{\omega t = -\pi}. \quad (19)$$

Dit leidt tot

$$\begin{aligned} & (L_1 + L_2) \left\{ A e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{\pi}{\omega}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot SE + \frac{L_2 R_1 - L_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \frac{SE}{\pi} \omega \right\} - L_2 S E = \\ & = (L_1 + L_2) \left\{ A e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{\pi}{\omega}} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot SE + \frac{L_2 R_1 - L_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \cdot \frac{SE}{\pi} \omega \right\} + L_2 S E. \end{aligned}$$

Hieruit volgt voor de integratieconstante de waarde

$$A = \frac{L_1 R_2 - L_2 R_1}{(R_1 + R_2)(L_1 + L_2)} \cdot \frac{SE}{\sinh\left(\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{\pi}{\omega}\right)}. \quad (20)$$

6. Periodiek openen en sluiten van een schakelaar

Wij kunnen de gevonden methode eveneens toepassen voor

het berekenen van de periodieke stroomen en spanningen in een netwerk onder invloed van periodiek zich openende en sluitende schakelaars. Wij zullen dit toelichten aan een eenvoudig voorbeeld, waarbij de fysische beteekenis van de af te leiden voorwaarden voor de integratieconstanten direct uit de schakeling is af te lezen. In fig. 5 is de gelijkspanningsbron E aangesloten op een keten bestaande uit R , L en C in serie. Over C staat een schakelaar, welke periodiek geopend en gesloten

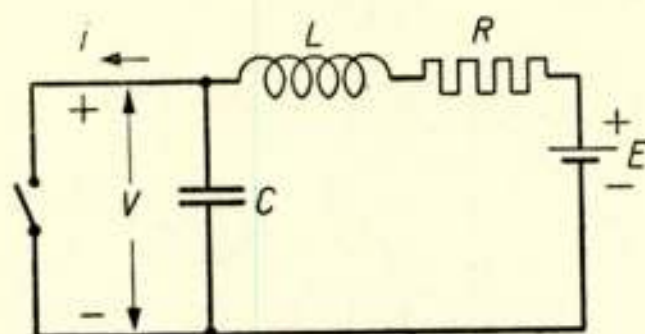


Fig. 5

wordt. Laten wij onderstellen, dat de schakelaar bij $t = 0, t = T, t = 2T$, enz. gesloten wordt en dat deze bij $t = aT, t = (1 + a)T, t = (2 + a)T$, enz. geopend wordt ($0 < a < 1$). Wij vragen naar de periodieke stroom en spanning van de schakelaar.

Op eenvoudige wijze is af te leiden, dat tusschen i en v de differentiaalvergelijking bestaat

$$(CL D^2 + CR D + 1) v + (L D + R) i = E. \quad (21)$$

Voor $0 < t < aT$ is de schakelaar gesloten, dus $v = 0$, en volgt uit de differentiaalvergelijking

$$i = A e^{pt} + E/R, \quad (22)$$

waarin A de integratieconstante is en $p = -R/L$.

Voor $aT < t < T$ is de schakelaar open, dus $i = 0$, en volgt uit de differentiaalvergelijking

$$v = B_1 e^{q_1 t} + B_2 e^{q_2 t} + E, \quad (23)$$

waarin B_1 en B_2 de integratieconstanten zijn en q_1 en q_2 de beide wortels van de vergelijking $CL q^2 + CR q + 1 = 0$.

Bij $t = aT$ wordt de schakelaar geopend en maakt dus i een sprong. Daar het rechterlid van de differentiaalvergelijking continu is, behoeven wij voor het onderzoek van de discontinuïteiten alleen op het linkerlid daarvan te letten. Hieruit volgt, dat CLv en $CLDv + CRv + Li$ beide continu zijn bij $t = aT$. Uit de eerste voorwaarde volgt

$$v_{aT+0} = v_{aT-0} = 0, \quad (24)$$

waarin wij met de index $aT+0$ aanduiden het tijdstip direct na het openen van de schakelaar en met $aT-0$ het tijdstip direct vóór het openen ervan. Hiermee volgt uit de tweede voorwaarde

$$(C Dv + i)_{aT+0} = (C Dv + i)_{aT-0},$$

wat leidt tot

$$C Dv_{aT+0} = i_{aT-0}. \quad (25)$$

De betrekkingen (24) en (25) zijn eenvoudig fysisch te interpreteren: (24) drukt uit, dat de spanning op de condensator bij het openen van de schakelaar niet verandert, en (25), dat de stroom door de spoel daarbij niet verandert, want bij gesloten schakelaar is deze stroom gelijk aan i en bij geopende schakelaar gelijk aan $C Dv$. Uit (24) en (25) volgt met (22) en (23)

$$B_1 e^{q_1 aT} + B_2 e^{q_2 aT} + E = 0 \quad (26)$$

en

$$C (q_1 B_1 e^{q_1 aT} + q_2 B_2 e^{q_2 aT}) = A e^{p aT} + E/R. \quad (27)$$

Bij $t = T$ wordt de schakelaar gesloten en maakt dus v een sprong. Uit de differentiaalvergelijking volgt, dat i dan een stoot zal krijgen, en dus stellen wij daarin $i = Dq$. Daarmee volgt, dat $CLv + Lq$ en $CL Dv + CRv + L Dq + Rq$ beide continu zijn bij $t = T$. Door de eerste voorwaarde met R/L vermenigvuldigd van de tweede af te trekken wordt q geëlimineerd, zoodat wij komen tot $CL Dv + L Dq$ continu of $C Dv + i$ continu bij $t = T$. Hieruit volgt

$$i_{T+0} = C Dv_{T-0}. \quad (28)$$

Analoog aan (25) drukt dit uit, dat de stroom door de spoel bij het sluiten van de schakelaar niet verandert. Wenschen wij, dat de verschijnselen periodiek zijn, dan zal i direct na $t = T$ gelijk moeten zijn aan i direct na $t = 0$. Uit (28) volgt dan met (22) en (23)

$$A + E/R = C (q_1 B_1 e^{q_1 T} + q_2 B_2 e^{q_2 T}). \quad (29)$$

Door (26), (27) en (29) worden de integratieconstanten bepaald.

Bestaat de schakelaar uit een gastriode, op welks rooster een periodieke spanning werkt, die de buis periodiek doet doorslaan, dan is de tijd, gedurende welke de stroom doorgaat, doorgaans een zeer klein deel van de periode. Om voor dit geval de spanning op de condensator te berekenen kunnen wij in de vergelijkingen voor de integratieconstanten a tot nul laten naderen en kunnen dan tevens A elimineeren. Wij komen dan tot

$$B_1 + B_2 + E = 0 \quad (30)$$

en

$$q_1 B_1 + q_2 B_2 = q_1 B_1 e^{q_1 T} + q_2 B_2 e^{q_2 T}. \quad (31)$$

Vergelijking (30) drukt uit, dat de spanning direct na de doorslag, dus direct na $t = 0$, nul is. Vergelijking (31) kunnen wij rechtstreeks afleiden door op te merken, dat in dit geval i bij $t = 0$, $t = T$, enz. een stoot krijgt en overigens nul is. In (21) stellen wij daarom weer $i = Dq$. Evenals boven kunnen wij dan uit de differentiaalvergelijking afleiden, dat $C Dv + i$ continu is bij de doorslag. Nu is i zoowel voor als na de doorslag nul en dus moet Dv continu blijven. Fysisch wil dit zeggen, dat direct vóór en na de doorslag de stroom door de condensator en dus ook die door de spoel dezelfde is. Wenschen wij weer, dat de spanning periodiek zal verlopen, dan zal Dv dus juist na $t = 0$ en juist vóór $t = T$ dezelfde waarde moeten hebben, wat leidt tot (31).

7. Slotopmerking

Bij alle beschouwingen over de invloed van discontinuïteiten van stroom- of spanningsbronnen moeten wij ons wel voor oogen houden, dat de werkelijkheid hierdoor steeds slechts wordt be-

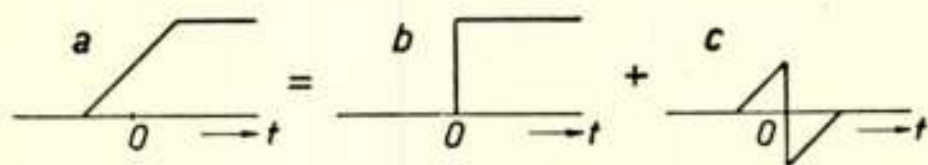


Fig. 6

naderd. Discontinuïteiten in mathematische zin komen niet voor, alleen min of meer snelle overgangen. Het zal dan ook steeds van de aard van het probleem afhangen of de benadering van zoo'n overgang door een discontinuïteit toelaatbaar is. Hebben wij bijv. te doen met een spanningsbron v , welke verloopt, zooals in fig. 6a is aangegeven, dan kunnen wij deze trachten te

benaderen door een spanningssprong, zoals fig. 6b aangeeft. Het verschil tusschen fig. 6a en fig. 6b, geteekend in fig. 6c, wordt dan verwaarloosd. Is deze verwaarloozing niet toelaatbaar, dan kunnen wij fig. 6c benaderen door een tweede-orde-discontinuïteit en deze aan de sprong van fig. 6b toevoegen. Verloopt v , zoals fig. 7 aangeeft, en laten wij de schakeltijd

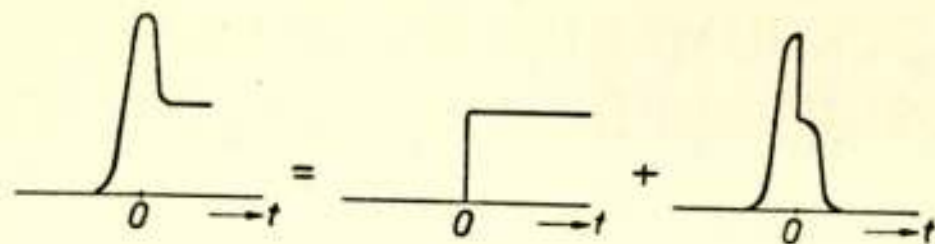


Fig. 7

tot nul naderen, dan zal, als de hoogte van de top daarbij constant wordt gehouden, $\int v dt$ in de limiet continu blijven, terwijl, als het oppervlak van de top constant gehouden wordt, $\int v dt$ in de limiet een sprong zal maken. Het zal dus weer van de aard van het probleem afhangen, hoe wij v mogen benaderen: door een sprong alleen, of door een sprong en een stoot. Dit alles doet de vraag ontstaan, in hoeverre de invloed van een willekeurige overgang overeenkomt met die van een reeks discontinuïteiten van verschillende orde.

DISCUSSIE

Ir de Lange: Gaan de beschouwingen nog door, als de coëfficiënten van de differentiaalvergelijking niet meer constant zijn, doch continue of discontinue functies van de tijd?

Ir Tellegen: Dit is inderdaad het geval, als de coëfficiënten continue functies van de tijd zijn. In de omgeving van een discontinuïteit in v kunnen deze dan nl. als constant worden beschouwd. Het afleiden van de differentiaalvergelijking uit de complexe uitdrukkingen door $j\omega$ door D te vervangen is dan echter niet meer mogelijk. Veranderen de coëfficiënten discontinu, doordat in het netwerk wordt geschakeld, dan kunnen wij dit tot de beschouwde gevallen terugbrengen door, zoals in §4 is opgemerkt, het sluiten van een schakelaar op te vatten als een sprong in een spanningsbron en het openen als een sprong in een stroombron.

EEN EENVOUDIGE REKENWIJZE VOOR HET BEREKENEN VAN STROOMKRINGEN WAARIN FREQUENTIEGEMODULEERDE SPANNINGEN WERKEN

door

J. W. ALEXANDER

(Voordracht voor het Genootschap gehouden op 3 Mei 1946)

INLEIDING

Het berekenen van stroomkringen, waarin een spanning werkt die sinusvormig met den tijd varieert, is een betrekkelijk eenvoudig probleem. De symbolische rekenwijze, die hier bekend wordt verondersteld, geeft een elegante oplossing van dit vraagstuk. Deze methode is echter niet meer toe te passen, wanneer, zooals bij frequentie modulatie, de spanning niet meer sinusvormig met den tijd varieert.

In principe zou dit vraagstuk op te lossen zijn door de frequentie-gemoduleerde spanning in al zijn componenten te splitsen volgens van der Pol¹⁾, vervolgens al deze sinusvormig met den tijd veranderlijke componenten op den betreffenden stroomkring te laten werken, en de resultaten bij elkaar op te tellen. Deze methode is bijv. toegepast door Roder.²⁾ Een direct antwoord wordt trouwens niet eens verkregen, want uiteindelijk moeten langs grafischen weg of met behulp van een rekenmachine bepaalde gevallen uitgerekend worden. Dit is een zeer moeizame en weinig overzichtelijke bezigheid.

Een andere weg is geopend door Carson en Fry³⁾, die in hun theoretische afleiding van de experimenteele resultaten van

¹⁾ Van der Pol, Frequentiemodulatie, Tsch. Ned. Rad. Gen. 4, 1929, 57.

²⁾ Roder, Proc. Inst. Rad. Eng., 25, 1937, 1017.

³⁾ Carson and Fry, Variable frequency electric circuit theory, B.S. T.J., 16, 1937, 513.

Armstrong een volledig antwoord op het onderhavige vraagstuk hebben gegeven. Echter kunnen noch de resultaten, noch de afleiding daarvan eenvoudig en overzichtelijk genoemd worden. Ook voor geroutineerde rekenaars met de symbolische rekenwijze blijft het geheel zeer weinig aantrekkelijk.

Al eenvoudiger wordt het geheele probleem bij de berekeningen volgens Vellat¹⁾, die met behulp van Fourier-integralen tot een zeer korte afleiding komt van zijn hoofdformule. De verdere toepassing leidt echter weer tot vellen vol rekenwerk, zoodat de navolging van deze methode bepaald moet vereischt. Door deze lange berekeningen gaat niet alleen het overzicht over de essentieele punten verloren, maar ontstaat ook een groote kans op rekenfouten.

Het is daarom, dat in het volgende eenige beschouwingen worden voorgedragen, aansluitend aan de rekenwijze volgens Vellat, waardoor het mogelijk is met weinig rekenwerk dezelfde resultaten te bereiken, terwijl de physische ondergrond veel duidelijker zichtbaar blijft.

§ 1.

Als probleem wordt gesteld de vraag naar de spanning die ontstaat op een impedantie Z , wanneer er een frequentiegemoduleerde stroom i doorheen vloeit. Daar de uitdrukking hiervoor ten grondslag ligt aan onze beschouwingen, zal de afleiding hier in het kort herhaald worden.

De frequentiegemoduleerde stroom kan voorgesteld worden door:

$$i = I e^{j(\omega_0 t + \int_0^t \omega_m dt)} \quad (1)$$

Indien ω_m geen functie van den tijd was, zou de frequentie gelijk zijn aan $\omega_0 + \omega_m$. Deze frequentie is $2\pi \times$ het aantal trillingen per seconde. Bij frequentiemodulatie is het aantal trillingen per seconde niet constant, *de* frequentie is dus niet meer op te geven. In dit geval is het begrip momenteele frequentie door Helmholtz ingevoerd. Hiermede is de momenteele frequentie de afgeleide naar den tijd van den phase hoek, dus

¹⁾ Vellat, Der Empfang frequenzmodulierter Wellen, E.N.T. 18, 1941, 61.

$$\omega_M = \frac{d}{dt} (\omega \cdot t + \int_0^t \omega_m dt) = \omega_0 + \omega_m \quad (2)$$

waarin ω_m met den tijd varieert.

Voor de verdere berekening is het noodig om de vergelijking van den stroom in een anderen vorm te schrijven n.l.

$$i = I e^{j(\omega_0 t + \int_0^t \omega_m dt)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3)$$

volgens de integraaltheorema van Fourier.

Nu berust de verdere redeneering op het feit, dat de modulatie gebeurt met een frequentie die klein is ten opzichte van de draaggolffrequentie. Bij het moduleeren blijven wij dus in de buurt van de draaggolffrequentie en het heeft zin om te zien wat er gebeurt in de omgeving van de draaggolffrequentie ω_0 . Daartoe schrijven wij:

$$\Omega = \omega_0 + \omega \quad (4)$$

waarin ω_0 dus een constante waarde heeft.

Hierdoor gaat (3) over in:

$$i = I e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5)$$

Voor elke component van den stroom heeft de impedantie Z een andere waarde $Z(\Omega)$. Zodoende luidt de vergelijking voor de spanning aan de klemmen van die impedantie

$$E = I e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\Omega) f(\Omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6)$$

Volgens Taylor kan nu de impedantie $Z(\Omega)$ ontwikkeld worden in de omgeving van de draaggolffrequentie. Wij verwachten dus een uitdrukking voor de spanning, waarin de modulatiefrequentie de rol speelt van de omgevingsfrequentie. Met behulp van (4) is

$$Z(\Omega) = Z(\omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} Z^{(n)}(\omega_0) \quad (7)$$

Dit gesubstitueerd in (6) levert:

$$E = I e^{j \omega_0 t} \left\{ Z(\omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Omega) e^{j \omega t} d\omega + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^{(n)}(\omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n f(\Omega) e^{j \omega t} d\omega \right\} \quad (8)$$

Het is mogelijk de integraal uit deze uitdrukking te verdrijven op de volgende manier:

Volgens (3) en (5) is immers:

$$e^{j \int_0^t \omega_m dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Omega) e^{j \omega t} d\omega \quad (9)$$

Door herhaald differentieeren naar den tijd wordt verkregen:

$$\omega_m e^{j \int_0^t \omega_m dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Omega) \omega e^{j \omega t} d\omega$$

$$(\omega_m^2 - j \omega_m') e^{j \int_0^t \omega_m dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Omega) \omega^2 e^{j \omega t} d\omega$$

$$(\omega_m^3 - 3j \omega_m \omega_m' - \omega_m'') e^{j \int_0^t \omega_m dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Omega) \omega^3 e^{j \omega t} d\omega$$

Met invoering van de differentiaal operator:

$$A_n = \left(\omega_m - j \frac{d}{dt} \right)^{n-1} \omega_m$$

kan hiervoor geschreven worden

$$A_n e^{j \int_0^t \omega_m dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Omega) \omega^n e^{j \omega t} d\omega \quad (10)$$

Dit gesubstitueerd in (8) levert:

$$E = I e^{j \omega_0 t + j \int_0^t \omega_m dt} \left\{ Z(\omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^{(n)}(\omega_0) A_n \right\} = I Z \quad (11)$$

Bij deze berekening is aangenomen, dat de reeksontwikkeling voor de impedantie een geldige reeks opleverde.

§ 2.

In deze paragraaf zal een vereenvoudiging van deze algemeene formule worden afgeleid, die aangeeft een eenvoudige, practisch

bruikbare betrekking tusschen den stroom en de spanning. Deze is wel niet theoretisch zonder beperkingen, maar, zooals zal worden aangetoond, voldoet de betrekking aan eischen, waaraan in de practijk in het algemeen zal voldaan zijn.

Voor den frequentiegemoduleerden stroom treedt dus als impedantie op:

$$Z = Z(\omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^{(n)}(\omega_0) A_n$$

Denken we ons echter het geval in, dat de stroom niet frequentiegemoduleerd was, maar sinusvormig tijdsafhankelijk was met de frequentie $\Omega = \omega_0 + \omega$, waarin ω dus niet van den tijd afhangt. In dit geval zou voor de impedantie geschreven kunnen worden:

$$Z(\Omega) = Z(\omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^{(n)}(\omega_0) \omega^n$$

Ter nadere vergelijking schrijven wij beide reeksen uit:

$$Z = Z(\omega_0) + Z^{(1)}(\omega_0) A_1 + \frac{1}{2!} Z^{(2)}(\omega_0) A_2 + \frac{1}{3!} Z^{(3)}(\omega_0) A_3 + \dots \quad (14)$$

$$= Z(\omega_0) + Z^{(1)}(\omega_0) \omega_m + \frac{1}{2!} Z^{(2)}(\omega_0) (\omega_m^2 - j \omega_m') +$$

$$+ \frac{1}{3!} Z^{(3)}(\omega_0) (\omega_m^3 - 3j \omega_m \omega_m' - \omega_m'') + \dots$$

$$Z(\Omega) = Z(\omega_0) + Z^{(1)}(\omega_0) \omega + \frac{1}{2!} Z^{(2)}(\omega_0) \omega^2 + \frac{1}{3!} Z^{(3)}(\omega_0) \omega^3 + \dots \quad (15)$$

Voor gelijkheid van beide reeksen moet allereerst

$$\omega = \omega_m \quad (16)$$

Dit beteekent, dat $\Omega = \omega_0 + \omega = \omega_0 + \omega_m$, zoodat volgens (2)

$$\Omega = \omega_M$$

Voor gelijkheid van beide reeksen moet dus in de eerste plaats voor de frequentie, waarmede de impedantie bedreven wordt, de momenteele frequentie genomen worden.

Dit is echter niet de eenige voorwaarde voor gelijkheid van beide reeksen. Het is tevens noodig dat de termen uit de eerste reeks, die niet voorkomen in de 2de, te verwaarloozen zijn t.o.v. de andere termen.

Het is nu de bedoeling van dit betoog om aan te toonen, dat in practisch alle gevallen aan deze voorwaarde is voldaan. Bij de afleiding van de algemeene formule (11) zijn geen beperkende bepalingen gemaakt, en deze formule is dus algemeen geldig. Maar in de practijk worden er vanzelf al beperkingen ingevoerd, waaraan wij zoo gewend zijn, dat zij niet meer als beperkingen gevoeld worden. Zoo zullen wij toch alleen maar moduleeren met frequenties die klein zijn t.o.v. de draaggolf-frequentie. Zoo zullen wij ook altijd wel ergens in het totale circuit een kring gebruiken, die op de draaggolffrequentie is afgestemd en minstens zoo breed is, dat de modulatie ook tot zijn recht kan komen. Aan den anderen kant zal de kring ook weer niet te breed mogen zijn, ter wille van de selectiviteit en de versterking. Wij zullen dus nu aantoonen, dat bij gebruik van een kring aan de genoemde voorwaarden is voldaan.

De vergelijking voor de impedantie van een kring luidt:

$$Z(\Omega) = \frac{Z_r}{1 + j 2 \frac{\Omega - \omega_0}{\omega_0} Q} \quad (17)$$

waarin Z_r de weerstand voor de afstem- of draaggolffrequentie voorstelt, terwijl Q de qualiteitsfactor is.

Uit (17) volgt voor $Z^{(1)}$ en $Z^{(2)}$ en $Z^{(3)}$:

$$Z^{(1)}(\omega_0) = -j \frac{2Q}{\omega_0} Z_r \quad Z^{(2)}(\omega_0) = -2 \left(\frac{2Q}{\omega_0} \right)^2 Z_r \quad Z^{(3)}(\omega_0) = j6 \left(\frac{2Q}{\omega_0} \right)^3 Z_r \quad (18)$$

Nu is voor een sinusvormig met den tijd veranderlijke modulatie met frequentie p en den frequentiezwaai s ¹⁾

$$\omega_s = s \cos pt \quad (19)$$

Substitutie hiervan in (14) levert met weglating van de constante $Z(\omega_0)$:

$$\begin{aligned} & -j \frac{2Q}{\omega_0} Z_r s \cos pt + \frac{1}{2} \cdot -2 \left(\frac{2Q}{\omega_0} \right)^2 Z_r (s^2 \cos^2 pt + j s p \sin pt) \\ & + \frac{1}{6} \cdot j 6 \left(\frac{2Q}{\omega_0} \right)^3 Z_r (\cos^3 pt - 3 j s \cos pt \cdot - s p \sin pt + s p^2 \cos pt) + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Op voorstel van Prof. Huydts schrijf ik hier s i.p.v. z voor den zwaai, ter onderscheiding van de letter Z voor impedantie.

$$= Z_r \left[-j \frac{2Q}{\omega_0} s \cos pt - \left(\frac{2Q}{\omega_0} \right)^2 (s^2 \cos^2 pt + j s p \sin pt) \right. \\ \left. + j \left(\frac{2Q}{\omega_0} \right)^3 (\cos^3 pt + 3 j s^2 p \sin pt \cos pt + s p^2 \cos pt) \dots \right]$$

Bij nadere beschouwing, blijkt dat voor $\frac{2Q}{\omega_0} p \ll 1$ de 3e, 5e en 6e term te verwaarlozen zijn t.o.v. de andere. Zoo valt bijv. de 6e term direct weg tegen de 1e, en de 1e en 3e kunnen samen geschreven worden als:

$$-j \frac{2Q}{\omega_0} s \sqrt{1 + \left(\frac{2Q}{\omega_0} \right)^2 p^2} \cos \left(pt - \text{tg} \text{tg} \frac{2Q}{\omega_0} p \right)$$

Bij weglating van de 3e term ontstaat er een fout in den phase hoek van de grootte van $\frac{2Q}{\omega_0} p$ en een fout in de amplitude van grootte van $\left(\frac{2Q}{\omega_0} p \right)^2$. Evenzoo valt voor $\frac{2Q}{\omega_0} p \ll 1$ de 5e term weg tegenover de 2e, enz.

De grootte van deze factor moet nader gepreciseerd worden, want zonder meer is niet direct te zien hoe groot ze is. Zooals bekend is, kon voor de frequentiebreedte van een kring gedefinieerd worden $\frac{\nu_0}{Q}$. Bij invoering van een breedtefactor $f_B = \frac{B}{2\nu}$ die dus aangeeft hoeveel keer de kring breder is dan de dubbele zwaai-frequentie, wordt de cirkelfrequentie van den zwaai:

$$s = \frac{\nu_0}{Q} \frac{\pi}{f_B}$$

Als verdere steeds optredende factor bij frequentiemodulatieproblemen is te noemen de zwaai-factor f_s , die aangeeft de verhouding tusschen den maximalen zwaai s en de maximale modulatiefrequentie p dus $f_s = \frac{s}{p}$

In dit geval wordt $p \frac{2Q}{\omega_0}$ dus

$$\frac{s}{f_s} \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{\nu_0}{Q} \frac{\pi}{f_B} \frac{1}{f_s} \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{1}{f_B f_s}$$

Een gebruikelijke waarde van $f_s = 5$ en van $f_B = 1,5$, zoodat

voor een practisch normaal geval $p \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{1}{7,5}$, hetgeen dus inderdaad $\ll 1$. Dit beteekent dat practisch de verwaarloozingen toegepast mogen worden, zoodat aan de genoemde voorwaarden is voldaan.

De *conclusie* van deze § luidt dus, dat practisch bij frequentiemodulatie de *impedantie berekend kan worden als voor sinusvormig veranderlijke stroomen, echter moet dan voor de frequentie de momenteele frequentie gesubstitueerd worden*. In formule gescheven dus:

$$\boxed{E = i Z(\omega_M)} \quad (21)$$

§ 3.

In deze paragraaf zullen eenige toepassingen van het hiervoor afgeleide gegeven worden. Hiervoor kiezen wij den afgestemden kring. Voor de impedantie daarvan moet dus nu geschreven worden $Z(\omega_M)$ dus

$$E = I \frac{Z_r}{1 + j 2 \frac{\omega_M - \omega_0}{\omega_0} Q} = I \frac{Z_r}{1 + j 2 \frac{\omega_m}{\omega_0} Q} \quad (22)$$

daar immers $\omega_M = \omega_0 + \omega_m$, waarin $\omega_m = s \cos pt$.

Ter vereenvoudiging zullen wij

$$2 \frac{\omega_m}{\omega_0} Q = x = 2 \frac{s \cos pt}{\omega_0} Q = \frac{1}{f_B} \cos pt \quad (23)$$

noemen, waarbij op te merken is dat $|x| < 1$.

Wij kunnen ons nu afvragen, wat er na frequentiedetectie van deze spanning ontstaat. De frequentiedetector bestaat uit een modulatieomvormer, gevolgd door een gelijkrichter. De modulatieomvormer met zijn hellende frequentiekaracteristiek kan beschreven worden door een impedantie die dus evenredig is aan x . Na den modulatieomvormer ontstaat dus een spanning evenredig aan

$$\frac{x}{1 + jx}$$

Na den gelijkrichter ontstaat hieruit een spanning evenredig met de amplitude van deze spanning, dus met

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Met een geringe fout kan hiervoor geschreven worden

$$x \left\{ 1 - \frac{x^2}{2} \right\} = x - \frac{x^3}{2} = \frac{1}{f_B} \cos pt - \frac{1}{2} \frac{1}{f_B^3} \cos^3 pt$$

Nu bevat de term $\cos^3 pt$ ook de term $\cos 3pt$, zoodat de 3e graads distorsie als verhouding van de amplituden van de 3e tot de 1e harmonische oplevert

$$D_3 = \frac{1}{8} \frac{1}{f_B^2} = \frac{1}{2} \frac{s^2 Q^2}{\omega_0^2}$$

b. Bij toepassing van een begrenzer verloopt de berekening van de distorsie iets anders. In dit geval speelt de amplitude geen rol meer en is alleen de phase maatgevend. Wij moeten dus schrijven:

$$E = I Z(\omega_M) = |I| e^{j\varphi_0} \frac{Z_r}{1 + jx} = |I| \frac{Z_r e^{j(\varphi_0 - \varphi)}}{\sqrt{1 + x^2}}$$

waarin $\varphi_0 = \varphi_0 t + \int_0^t s \cos pt$ en $\varphi = bg \operatorname{tg} x$.

Met een kleine fout is

$$\varphi = x - \frac{x^3}{3}$$

Laagfrequent ontstaat na begrenzing en na detectie een spanning, die evenredig is aan de phasevariatie met den tijd, dus

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi_0 - \varphi)}{dt} &= \omega_0 + s \cos pt - x' + x^2 x' \\ &= \omega_0 + s \cos pt + \frac{\dot{p}}{f_B} \cos pt - \frac{\dot{p}}{f_B^3} \sin pt \cos pt \end{aligned}$$

Hieruit volgt direct voor D_3 :

$$D_3 = \frac{1}{4} \frac{\dot{p}}{f_B^3 s} = \frac{1}{4} \frac{1}{f_s f_B^3} = 2 \dot{p} \frac{s^2}{\omega_0^3} Q^3$$

Uit deze berekeningen is direct in te zien, dat met begrenzer alle distorsies (ook de hogere graads) evenredig zijn met de laagfrequente modulatiefrequentie, terwijl zij zonder begrenzer daarvan onafhankelijk zijn.

c. Als derde voorbeeld kiezen wij de berekening van de 3e graads distorsie, die afkomstig is van een bandfilter.

De vergelijking van de impedantie van een bandfilter luidt:

$$Z = \frac{Z_r}{1 + j 2 x - x^2 + a}$$

waarin $a = k^2 Q^2$.

Hier is dus de phasehoek van de impedantie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 x}{1 + a - x^2} = \frac{2 x}{(1 + a) \left(1 - \frac{x^2}{1 + a}\right)} = \frac{2 x}{1 + a} \left(1 + \frac{x^2}{1 + a}\right)$$

Hieruit volgt voor φ bij benadering

$$\varphi = \frac{2 x}{1 + a} + \frac{2 x^3}{(1 + a)^2} - \frac{1}{3} \frac{(2 x)^3}{(1 + a)^3}$$

zoodat laagfrequent

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{2}{1 + a} + \frac{2 x^2 (3 a - 1)}{(1 + a)^3} \right) x'$$

Daar $x^2 = \frac{1}{f_B^2} \cos^2 pt$ en $x' = -\frac{p}{f_B} \sin pt$, volgt voor

$$D_3 = \frac{1}{4} \frac{2}{f_B^2} \frac{3 a - 1}{(1 + a)^3} \frac{p}{f_B} \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \frac{3 a - 1}{(1 + a)^3} \frac{1}{f_s f_B^3} = 4 p \frac{s^2}{\omega_0^3} Q^3 \frac{3 a - 1}{(1 + a)^3}$$

Voor een bepaalde waarde van a wordt dus $D_3 = 0$.

Dit zijn slechts eenige grepen uit de talloze gevallen die zich kunnen voordoen, zooals bijv. de invloed van verstemmingen. Het zal echter wel voldoende aangetoond zijn, hoe eenvoudig de berekeningen in practische gevallen worden.

APPENDIX.

Ter illustratie van het verschil in rekenwijze en ter controle van de resultaten zal in het volgende een voorbeeld gegeven worden van de exacte methode volgens Roder¹⁾ voor geval *b*.

Hierbij ontstaat op den kring een spanning van dezen vorm

$$R \sin \omega_0 t + S \cos \omega_0 t$$

waarin met de Besselfunctie I_n

$$R = I_0(f_s) + 2 \sum_{n=2,4,\dots} \frac{I_n(f_s)}{1 + \left(\frac{n}{f_s f_B}\right)^2} \left(\cos n pt + \frac{n}{f_s f_B} \sin n pt \right)$$

¹⁾ Loc. cit.

$$S = 2 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{I_n(f_s)}{1 + \left(\frac{n}{f_s f_B}\right)^2} \left(\sin n p t - \frac{n}{f_s f_B} \cos n p t \right)$$

De distorsie is te berekenen uit $\frac{d\varphi}{dt}$ waarin $\varphi = b g \operatorname{tg} \frac{S}{R}$. Daartoe is eerst noodig om φ als functie van $p t$ te kennen. In het volgende is dit berekend voor $f_B = 5$ en $f_B = 1,5$

$$\begin{array}{lll} I_0(5) = -0,1776 & I_1(5) = -0,3276 & I_2(5) = 0,04657 \\ I_3(5) = 0,3648 & I_4(5) = 0,3912 & I_5(5) = 0,2611 \\ I_6(5) = 0,1310 & I_7(5) = 0,05338 & I_8(5) = 0,01841 \\ I_9(5) = 0,00552 & I_{10}(5) = 0,001468 & \end{array}$$

Voor verschillende waarden van $p t$ worden nu de reeksen R en S :

	R	S	$\operatorname{tg} \varphi$	φ
$p t = 0^\circ$	0,6962	-0,4744	-0,681	-0,598
30°	-0,3213	0,7917	-2,46	1,957
60°	-0,6207	-0,6733	1,082	3,97
90°	0,201	-0,971	-4,83	4,915
120°	-0,1293	-0,986	7,62	4,58
150°	-0,8299	0,133	-0,16	2,987

Uit de graphische voorstelling van $\varphi = f(p t)$ worden de 1e en 3e harmonische bepaald, ¹⁾ door 12 ordinaten van φ op afstanden van 15° te meten uit $\varphi = f(p t)$.

Dit levert:

$$\begin{array}{llllll} y_1 = 0,775 & y_2 = 1,95 & y_3 = 3 & y_4 = 3,98 & y_5 = 4,60 & y_6 = 4,90 \\ y_7 = 4,97 & y_8 = 4,57 & y_9 = 3,92 & y_{10} = 2,98 & y_{11} = 1,83 & y_{12} = 0,60 \end{array}$$

Hieruit volgen de 6 sommen en verschillen:

$$\begin{array}{llllll} s_1 = 2,60 & s_2 = 4,92 & s_3 = 6,93 & s_4 = 8,55 & s_5 = 9,48 & s_6 = 4,90 \\ d_1 = -0,0275 & d_2 = -0,60 & d_3 = -0,925 & d_4 = -1,02 & d_5 = -1,05 & d_6 = -0,6 \end{array}$$

zoodat, na vermenigvuldiging met de sinus van een aantal malen 15° : $6 a_1 = 29,5$ dus $a_1 = 3,91$.

¹⁾ Elias, Theorie der wisselstroommen 1943, p. 227.

Op een dergelijke manier wordt b_1 verkregen, n.l. 0,587, zoodat tenslotte de 1e harmonische is

$$\sqrt{4,91^2 + 0,587^2} = 4,95$$

Op een soortgelijke wijze wordt de 3e harmonische verkregen als

$$\sqrt{0,01^2 + 0,0175^2} = 0,0201.$$

Dit geeft dus 1e en 3e harmonische van de $\varphi = f(p t)$ kromme. Daar bij de detectie de afgeleide van de phase wordt verkregen, moet de hier berekende 3e harmonische nog met 3 vermenigvuldigd worden, zoodat $D_3 = 100 \times 3 \times \frac{0,0201}{4,95} = 1,22\%$

Volgens de hiervoor gegeven theorie is:

$$D_3 = \frac{1}{4} \frac{1}{f_s} \frac{1}{f_B^3} = \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{1,5^3} = 1,48\%$$

Met verdere benadering voor $\varphi = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots$ wordt dit:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{1}{f_s} \frac{1}{f_B^3} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{1}{f_B^2} + \frac{9}{16} \frac{1}{f_B^4} - \frac{7}{16} \frac{1}{f_B^6} + \frac{45}{128} \frac{1}{f_B^8} \dots \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1,5^3} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{1}{1,5^2} + \frac{9}{16} \frac{1}{1,5^4} - \frac{7}{16} \frac{1}{1,5^6} + \frac{45}{128} \frac{1}{1,5^8} \dots \right) \\ &= 1,07\%. \end{aligned}$$

De 1e benadering geeft reeds de goede orde van grootte aan, terwijl de verdere benaderingen aantoonen dat een fout van $\sim 10\%$ in het antwoord wordt verkregen. Afgezien nog van de mogelijke onnauwkeurigheid bij de exacte methode is een fout in het antwoord van deze grootte wel te verwachten, als de benaderingen bij de afleiding van deze eenvoudige rekenwijze in aanmerking worden genomen.

Behalve het voordeel van tijd- en werkbesparing van de verkorte rekenwijze, zooals blijkt uit het gegeven voorbeeld, bestaat nog het groote voordeel van het antwoord in formule vorm. Door substitutie van verschillende waarden van de veranderlijke in deze formule is snel een overzicht te verkrijgen over het gedrag van de gevraagde grootte, terwijl bij de exacte methode voor elke waarde van de veranderlijke opnieuw de geheele rekening herhaald moet worden.

DISCUSSIE

Hr R o o r d a: Blijft bij den begrenzer de trillingsvorm onveranderd?

Ir A l e x a n d e r: Na den begrenzer in het middelfrequentdeel van den ontvanger is weer een middelfrequentkring geschakeld. Deze filtert uit de door den begrenzer vervormde spanning weer de grondfrequentie, waarbij alleen de amplitude beïnvloed is, die echter voor den frequentiedetector geen rol speelt.

Ir v. S l o o t e n: Ik moet opmerken, dat indien de begrenzer een phasevervorming geeft, deze zeer klein zal zijn, daar de phaseveranderingen ten gevolge van de frequentiemodulatie zelve zeer veel grooter zijn.

A.: Dit zal inderdaad het geval zijn.

Ir S c h o u t e n: In hoeverre zijn deze uitdrukkingen min of meer geldig indien het verband tusschen E en I niet het karakter heeft van de impedantie van een enkelen kring?

A.: De afleidingen zijn niet beperkt tot een enkelen kring, wel voor impedanties, waarbij voldaan is aan de gegeven voorwaarden voor de zwaai-factor en de breedte-factor, en die voor het beschouwde gebied een langzaam verloopende amplitude en phase hebben, zooals dit zich in de practijk zal voordoen.

Ik zie dus af van theoretische mogelijkheden, als bijv. phasesprongen, maar beperk mij uitsluitend tot practische gevallen.

SUMMARY

In this paper a very simple method of calculation has been derived for the investigation of frequency modulated circuits. This method demands that such circuits should be calculated by the normal complex method, but in the ultimate result the constant frequency of this complex method had to be substituted by the instantaneous frequency. This calculation is not entirely exact, but it is shown that the faults are practically negligible (about 10% in the final results). The governing factors for this are the swingfactor, i.e. the ratio between the maximum frequency deviation or the swing and the maximum modulating frequency, besides the band width factor, i.e. the ratio between the band width of the system and the double swing.

As an example the distorsion is calculated for a tuned circuit, with and without limiter, also for a band pass filter. For comparing the velocity and the exactness of this method the calculation is also given using the method of dividing into frequency components, followed by a graphical determination of the distorsion (therefore this is also not entirely exact). In addition the latter method has the disadvantage that the result is not given in a formula, so that any change requires a new calculation, which is not the case with the given approximate method.

RADAR: HET „CAVITY MAGNETRON”

door

S. GRATAMA

Naar aanleiding van de Radiolocation Convention gehouden voor The Institution of Electrical Engineers geeft de *Wireless World* in het Meinumner van 1946 een overzicht van de meest belangrijke ontwikkelingen op het gebied der Radar-techniek. Het opent met een beschrijving van het moderne z.g. Cavity Magnetron.

In het verloop van wereldoorlog nr. 2 kreeg men al spoedig behoefte aan generatoren, die in staat waren op zeer hoge frequenties (3000-10000 MHz) zeer groote stootenergiën met een tijdsduur van 1 à 2 micro-seconden, op te wekken. Omstreeks 1939 was feitelijk de eenige buis, die op deze frequenties in staat was betrouwbaar en stabiel eenige tientallen Watts energie te leveren, het in Amerika ontwikkelde z.g. Klystron. Aandeneisch om impulsenergiën van eenige honderden Kilowatts te kunnen opwekken kon het klystron evenwel niet voldoen.

Prof. J. T. Randall en Dr H. A. H. Boot van de universiteit van Birmingham hadden in 1939 het idee, dat wanneer men het bekende magnetron-principe combineerde met direct aangestooten trilholten (Cavity-resonators), een groote verbetering in de energie-afgifte verkregen zou kunnen worden. Door zeer eenvoudige overwegingen kwamen zij tot de simpele en elegante constructie, die in fig. 1 in principe is aangegeven.¹⁾

A is een roodkoperen anodeblok, waarin een zestal cilindrische trilholten zijn uitgefraisd. Volgens Randall en Boot

¹⁾ Zie „Early Work on the Cavity Magnetron”.

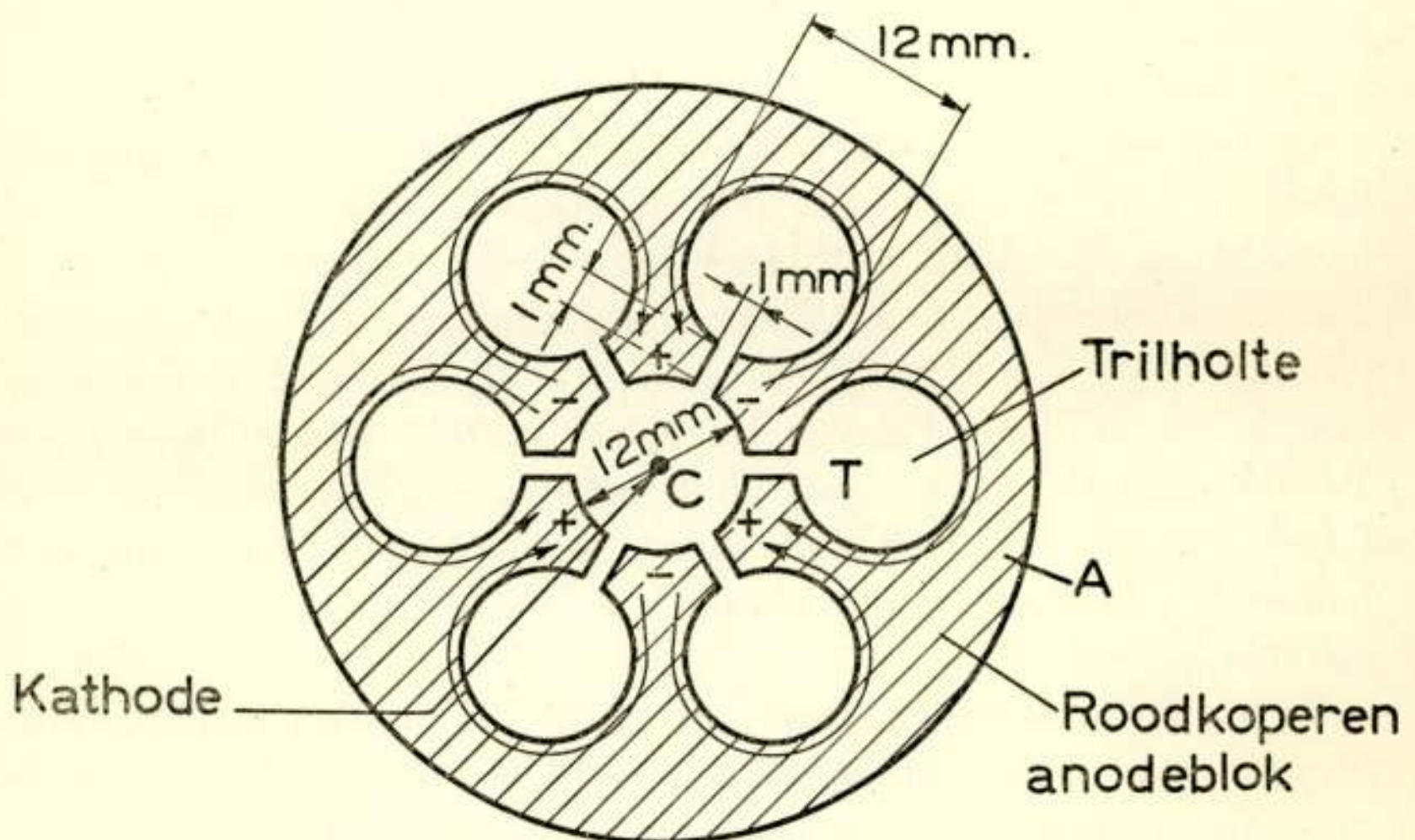
Voordracht gehouden door Prof. J. T. Randall. D. Sc. en H. A. H. Boot Ph. D.

Radiolocation Convention 26—29 Maart 1946.

moet men deze trilholten opvatten als cilindrisch omgebogen Hertz-dipolen. (dipoollussen). Hertz had aangetoond en latere berekeningen van Macdonald wezen uit, dat de te verwachten golflengte 7.94 maal de diameter van de dipoollus zou bedragen. De volgende voorloopige afmetingen werden aangehouden:

Diameter van de cilindrische trilholte	Breedte en diepte van de spleten	Aantal trilholten	Diameter van de anodekathode ruimte	Te verwachten golflengte
1,2 cm.	0,1 cm.	6	1,2 cm.	10 cm.

Als kathode werd gebruikt een wolfraamdraad van 0,75 mm. diam. Het magnetron wordt in een constant magnetisch veld van bepaalde sterkte geplaatst. Dit veld is evenwijdig gericht aan de kathode. Een eenvoudige, globale berekening toonde aan,



Dikte van het anodeblok is ca. 2 cm

Fig. 1.

Doorsnede van het eerste experimenteele trilholte-magnetron.

dat gezien de afmetingen, de anodespanning ca. 16000 Volts en de veldsterkte 1000 Oersteds zou moeten bedragen. Op 21 Februari 1940 werd de buis geprobeerd en deze proef was direct een groot succes. Het magnetron ontwikkelde een vermogen van *gemiddeld* 400 Watt op een golflengte van 9,8 cm.

Bij een impulsduur van 1 μ -sec. en een impuls-herhaling-fre-

quentie van 1000 komt een gemiddeld vermogen van 400 Watt overeen met een impulsvermogen 400 k.W. De nieuwste typen magnetrons kunnen een impulsvermogen van 2500 à 3000 k.W. afgeeven.

De meest geschikte trilwijze van de trilholten is die, waarbij de stroomen in de holle ruimten rondlopen (aan de binnenzijde!) en zodoende twee tegenover elkaar gelegen segmenten een tegengestelde lading geven.

In fig. 1 is een „momentopname” van dit geval aangegeven. Deze trilwijze wordt de π trilwijze genoemd, zulks naar aanleiding van het feit, dat het phaseverschil van twee tegenovergestelde segmenten $= 180^{\circ} = \pi \text{ rad}$.

Bij deze π trilling wordt de frequentie voornamelijk bepaald door den diameter van de trilholte. Het elektrische veld verloopt tusschen de segmenten van tegenovergestelde polariteit en is tusschen de spleten het sterkst en homogeen. Het magnetische veld loopt axiaal in de holten en heeft de grootste sterkte daar, waar de stroom het grootst is; d.i. aan de, het meest van de as verwijderde binnenzijde van de trilholte, (staandegolf). De magnetische krachtlijnen vormen uit den aard der zaak gesloten banen en de door een holte loopende krachtlijnenbundel splitst zich bij het verlaten hiervan in twee gelijke bundels, waarvan de eene via de rechter naburige holte en de andere via de linker naburige holte terugkeert en zich zodoende weer tot de oorspronkelijke aanwezige bundel in de eerstgenoemde holte vereenigen.¹⁾

Alle trilholten zijn dus onderling gekoppeld.²⁾ Om de trilholten zoo goed mogelijk „in den pas” te dwingen en ongewenschte trilwijzen te onderdrukken worden de segmenten met gelijkphasige potentiaal door middel van korte draadstukjes met elkaar verbonden. Deze aequi-potentiaalverbindingen bleken een groote verbetering te zijn. De stabiliteit werd er gunstig door

¹⁾ Deze voorstellingswijze is sterk geidealiseerd.

In werkelijkheid zal een deel van de flux ook nog door de anode-kathode-ruimte vloeien.

Het veld moet vrij ingewikkeld zijn, aangezien de lengte van de krachtlijnenbanen niet meer klein is t.o.v. de golflengte (vgl. quasi-stationaire veld van een antenne).

²⁾ Ook de dekplaten geven aanleiding tot koppeling.

De stroombanen van de hierin optredende wervelstroomen zijn met elkaar gekoppeld.

beïnvloed en het rendement steeg van 10–15% op 35–50%.

Verder bleek het mogelijk door verbuigen van genoemde verbindingsdraadjes de opgewekte frequentie eenigszins te beïnvloeden. Dit was dus een extra voordeel van deze werkwijze.

In fig. 3 is een magnetron volgens Randall en Booth in praktische uitvoering geschetst. De opgewekte energie wordt afgenomen met behulp van een enkele kleine lusvormige winning, die in één van de trilholten is geplaatst. Het eene uiteinde van dit koppellusje is met het anodeblok verbonden, het andere aan den inwendigen geleider van een kort stuk coaxiale leiding bevestigd. Zoals uit de figuur blijkt is het lusje niet

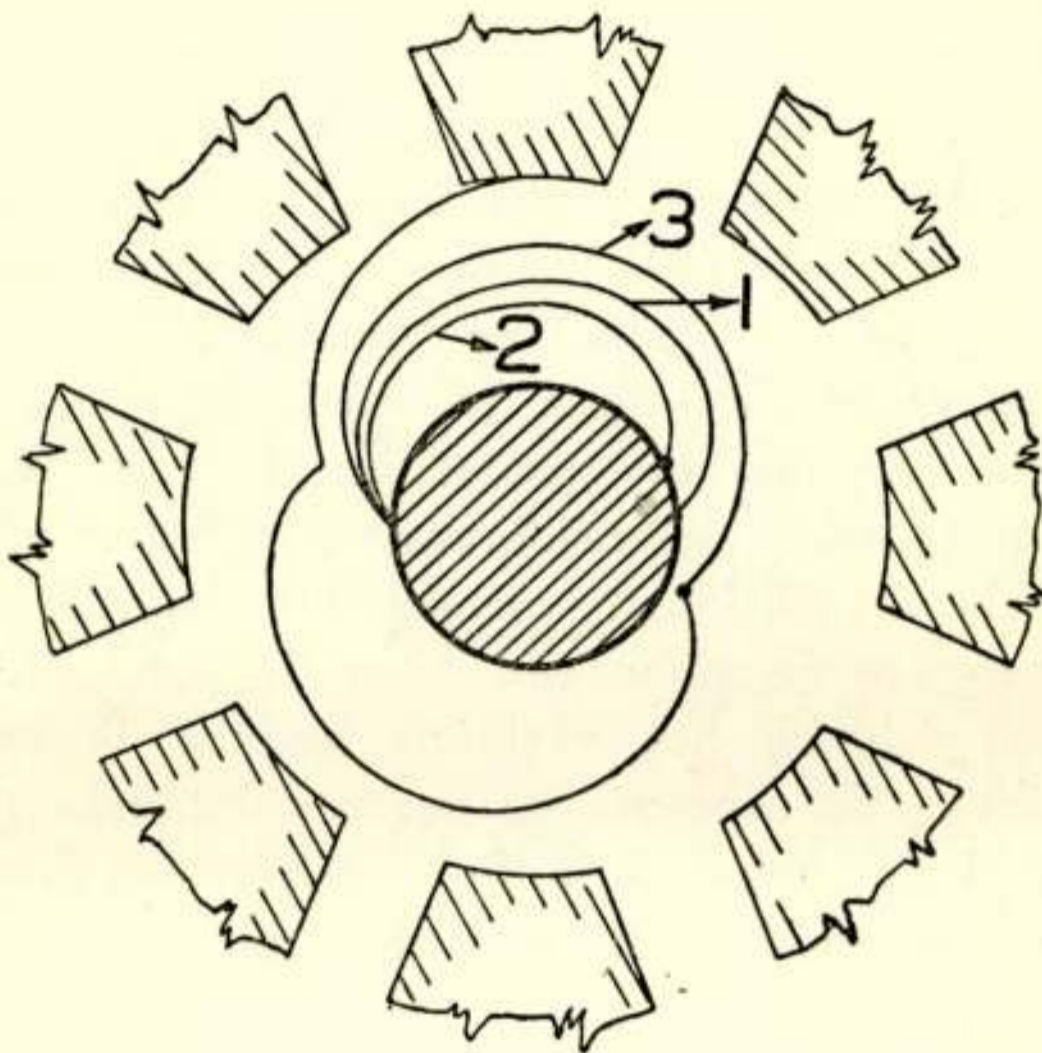


Fig. 2.

Eenige elektronenbanen die bij een magnetron kunnen voorkomen.

symmetrisch in de holte opgesteld, maar meer naar de trilholtebinnenzijde, die het verst van de as verwijderd is. Daar is de krachtlijndichtheid het grootst.

De binnengeleider van het korte stuk coaxiale leiding is geïsoleerd en vacuumdicht naar buiten gevoerd en hier kan men de uitwendige belasting b.v. via een andere coaxiale kabel of via een wave-guide aansluiten. Bij de moderne magnetrons wordt de stroomsterkte in het koppellusje zeer groot. Stelt men de golfweerstand van het stukje coaxiale leiding op 70 Ohm en geeft het magnetron een energie-impuls van 2500 k.W., dan loopt gedurende 1 á 2 μ -sec. een effectieve ultra hoogfrequente

wisselstroom van ca. 190 Amp. door dit kleine lusje, waarvan de draad-diameter ongeveer 1,4 mm. bedraagt.

In fig. 2 zijn eenige mogelijke electronenbanen aangegeven. Nr 1 stelt een electronenbaan voor zooals kan optreden in niet-oscillerende toestand. Nr 2 geeft een baan weer van een electron, dat niet met de juiste snelheid loopt en energie van het oscillerende elektrische veld ontvangt en weer op de kathode terugvalt onder vrijmaking van warmte. Nr 3 stelt de weg voor van een electron, dat met de juiste snelheid loopt en energie aan het oscillerende systeem afgeeft. Om een groot rendement

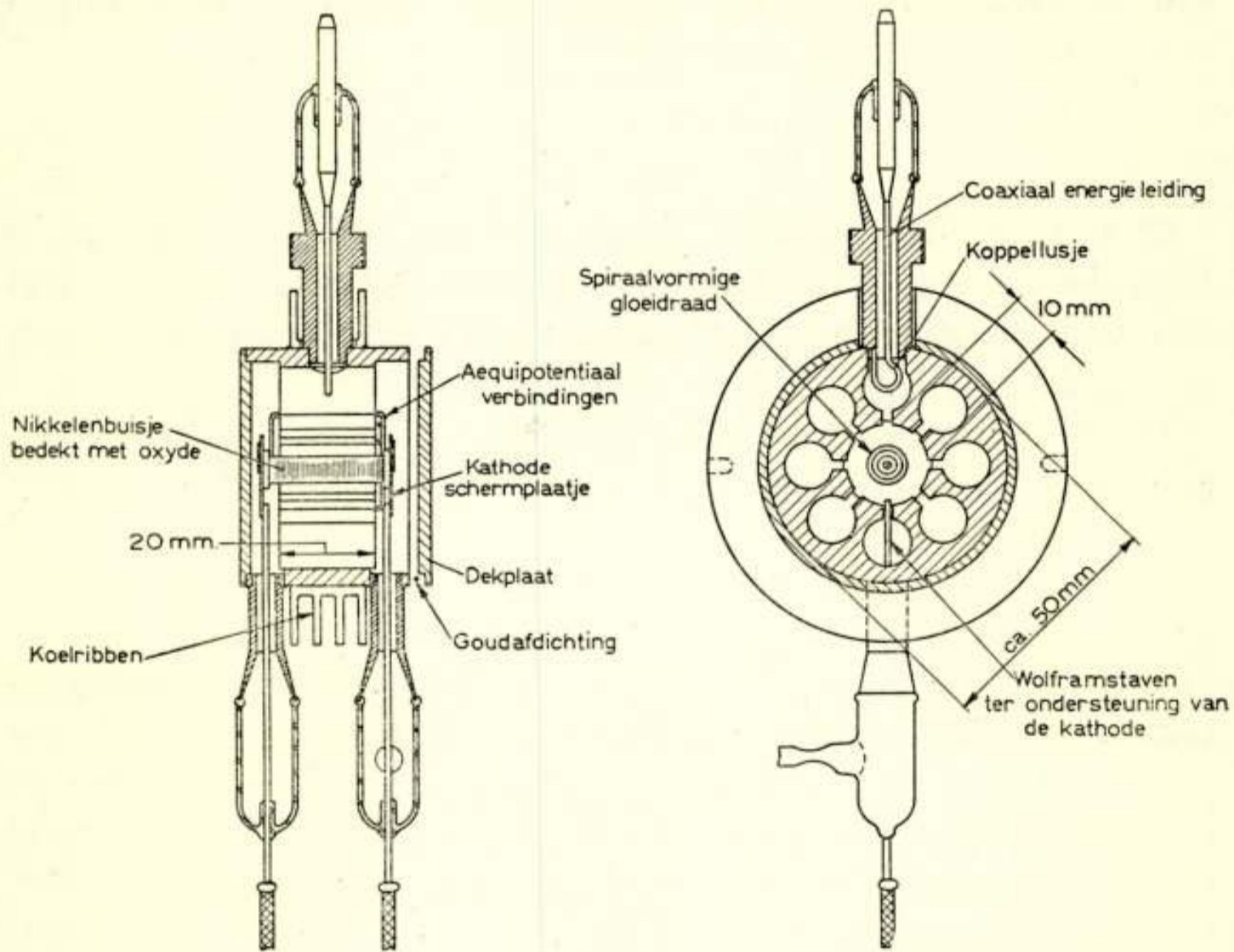


Fig. 3.

Doorsnede van een trilholte-magnetron in praktische uitvoering.

te bereiken zouden alle electronen in de conditie van Nr 3 moeten verkeerden. De electronen volgens klasse No 2 vervullen evenwel toch een zeer belangrijke taak, zij zorgen er voor dat de enorme electronen-missie van de kathode, benodigd om de zeer groote anodestroom-impulsen te leveren, tot stand komt. Deze emissie is voor het grootste deel secundaire emissie en wordt veroorzaakt door het bombardement van de, op de kathode terugvallende, electronen; de primaire emissie is slechts in de orde van enkele milli-ampères!

Wanneer het magnetron eenigen tijd is ingeschakeld en voldoende warm is geworden, wordt de gloeidraadspanning uitgeschakeld. Door het electronenbombardement blijft de kathode voldoende warm. Het groote probleem is om voor een voldoende warmte-afvoer van de kathode te zorgen. Dat de benodigde electronen-emissie zeer groot is, moge uit het volgende voorbeeld blijken.

Stel: men gebruikt een magnetron voor 2500 k.W. afgegeven impulsenergie en een rendement van 50%, dan bedraagt het opgenomen impulsvermogen 5000 k.W. De anodespanning van een dergelijke magnetron is ca. 40.000 Volts. De max. optredende anodestroom is derhalve:

$$\frac{5 \times 10^6}{4 \times 10^4} = 125 \text{ Amp.}$$

Het is zonder meer duidelijk, dat dit een zeer bijzondere kathodeconstructie vereischt. De vervaardiging hiervan was wel één van de grootste problemen, die bij deze magnetronbuizen optraden.

De 3 cm. magnetrons zijn in principe gelijk aan die van 10 cm. golflengte. Alleen worden er voor de behouding van dezelfde stabiliteit en hetzelfde rendement ongeveer twee maal zooveel trilhouten in gebruikt. ¹⁾ Bij normaal practisch gebruik van dergelijke magnetrons heeft het voordeelen de anode direct te aarden en men voert in dit geval negatieve hoogspanningsimpulsen aan de kathode toe. Daar de frequentie en de trilwijze afhangen van de grootte van de anodespanning moeten de hoogspanningsimpulsen zoo rechthoekig mogelijk verlopen, opdat tijdens het oscilleeren de anodespanning constant blijft. Ook variaties in de grootte der belasting moeten vermeden worden.

Fig. 5 is de afbeelding van een magnetron voor 2500 k.W. impulsenergie.

Hier steekt de binnengeleider van de korte coaxiale leiding over een bepaalde lengte in een cilindrische wave-guide en exciteert deze dus direct. De plaats (in axiale richting) en de lengte van dit instekende stuk zijn zeer kritisch (aanpassing), wanneer het er op aankomt een zuiver loopende golf in de wave-guide te verkrijgen.

¹⁾ Hierdoor wordt de verhouding:

$$\frac{\text{Wattlooze trillingsenergie}}{\text{Watt energie}}$$

grooter. Dit bevordert in het algemeen de stabiliteit.

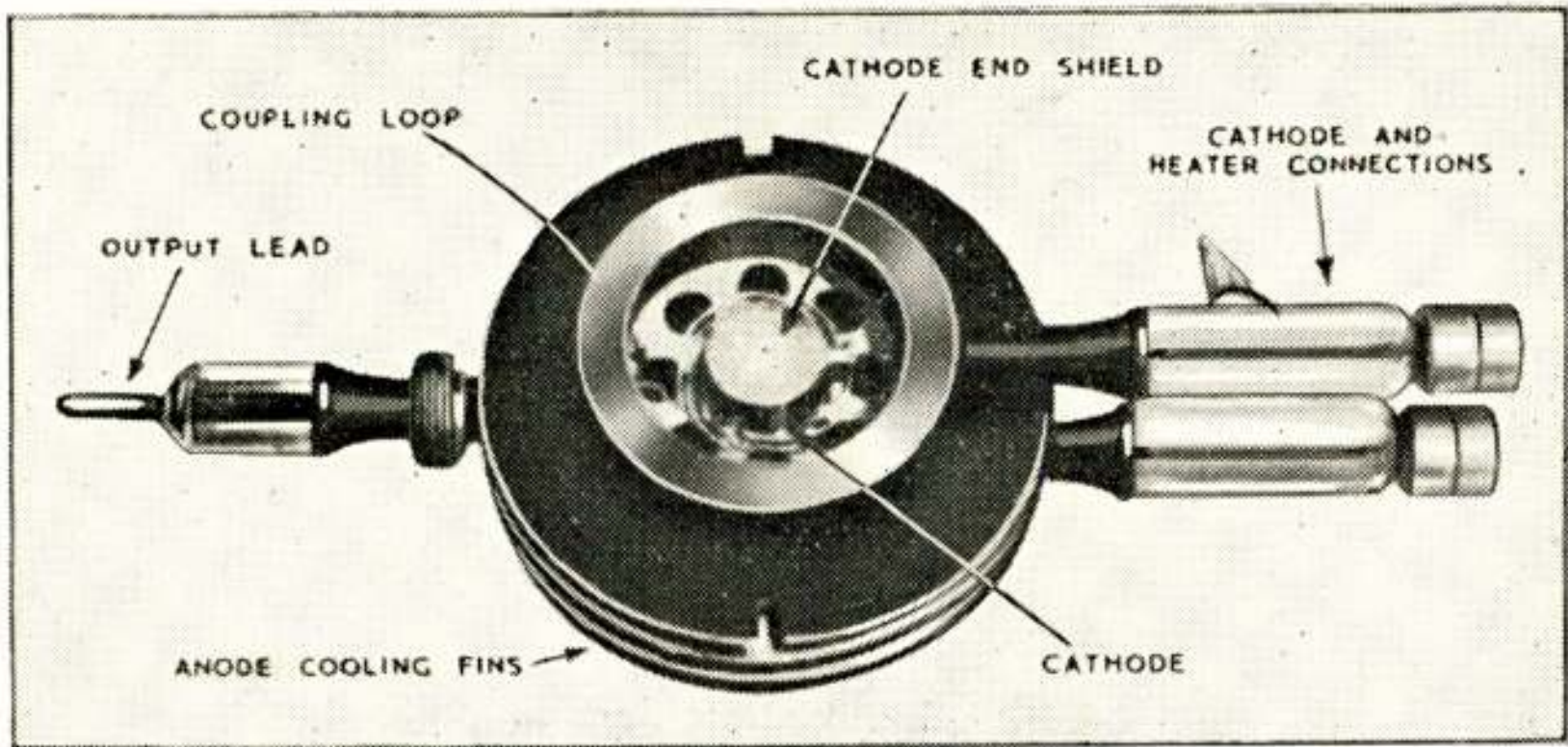


Fig. 4.

Afbeelding van het magnetron type C V 64, waarvan een dekplaat is weggenomen. Impulsvermogen 500 kW. $V_a = 28000$ V.

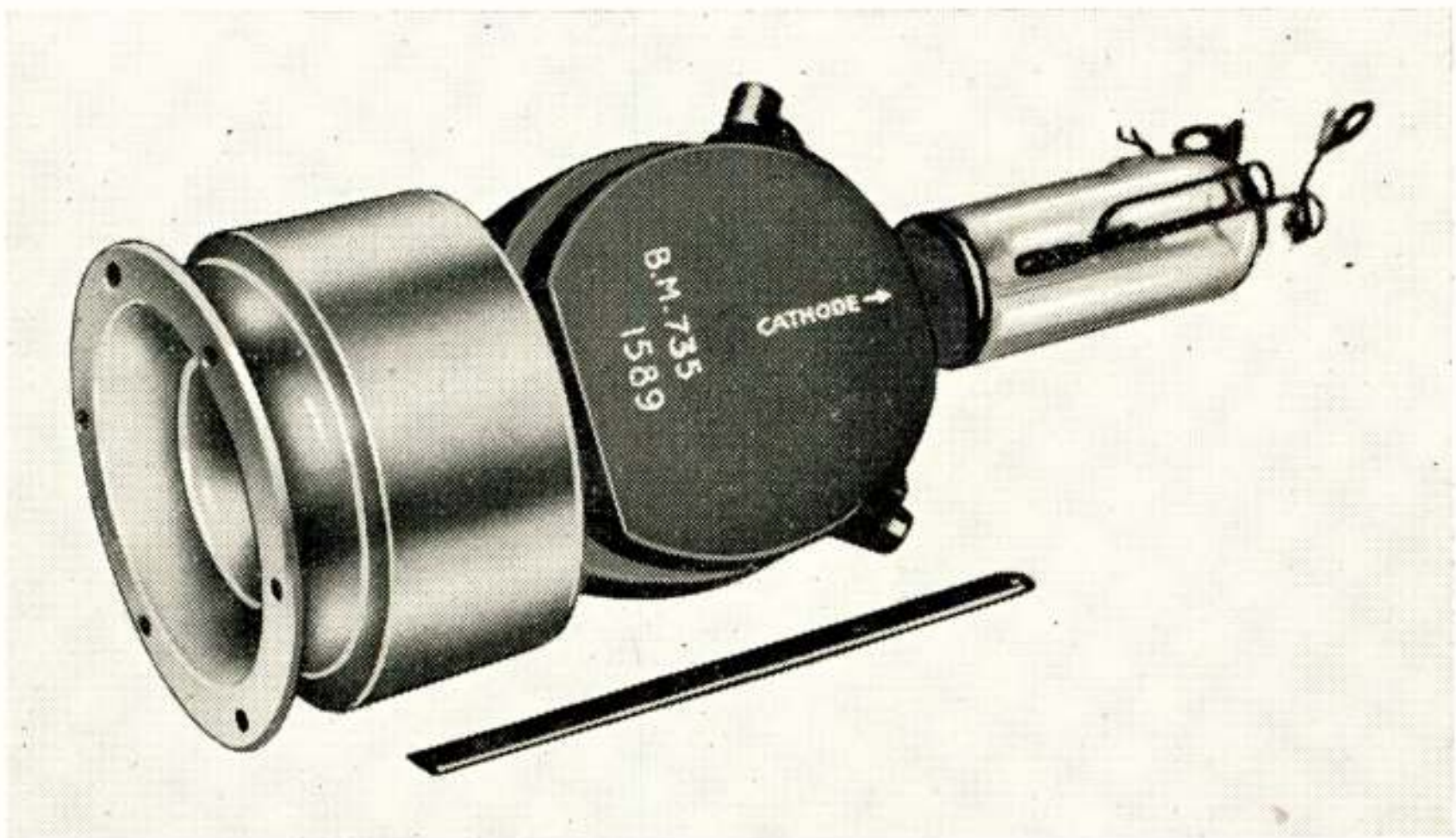


Fig. 5.

Afbeelding van het magnetron type B.T.H. BM 735. Impulsvermogen van 2500 kW. $V_a = 45000$ V. Op den voorgrond een maatstok van 15 cm. lengte.

DISSERTATIES

J. van Slooten. Meetkundige beschouwingen in verband met de theorie der elektrische vierpolen.

Dissertatie Delft 1946. Uitg. W. D. Meinema, Delft.

In de twee eerste hoofdstukken van dit proefschrift worden in hoofdzaak behandeld de transformatoreigenschappen van vierpolen, d.w.z. van elektrische systemen, die twee ingangs- en twee uitgangsklemmen vertoonen.

Daarbij beschouwt men de tusschen de ingangsklemmen optredende impedantie als een functie van de tusschen de uitgangsklemmen aangesloten uitwendige impedantie. De ingangsimpedantie is dan de „getransformeerde” uitgangsimpedantie en deze transformatie komt in het complexe impedantievlak overeen met een z.g. cirkelverwantschap.

De meetkundige eigenschappen van deze cirkelverwantschap worden uitvoerig onderzocht, in het bijzonder voor het geval dat de vierpool verliesvrij is. In dat geval heeft men te maken met een z.g. hyperbolische transformatie (voorbeeld: de electromagnetische transformator) of met een elliptische transformatie (voorbeeld: de concentrische kabel of een systeem van twee parallelle geleidingen), waartusschen de parabolische transformatie het overgangsgeval vormt. Enkele hoofdzaken van de in de twee eerste hoofdstukken behandelde theorie zijn vroeger reeds in dit tijdschrift gepubliceerd (deel IX, 1941, pag. 217-234)

In de laatste drie hoofdstukken wordt de volgende vraag behandeld: wanneer men twee vierpolen, ieder met bekende en eenvoudige transformatoreigenschappen, door parallelschakeling of door serieschakeling samenvoegt tot een nieuwe vierpool, hoe hangen de eigenschappen van deze laatste dan af van die der samenstellende vierpolen? Deze vraag is in de praktijk ontstaan, daar men in de regel slechts beschikt over bepaalde typen van vierpolen als constructie-elementen (b.v. parallel draadsystemen in de korte golftechniek).

Het gestelde probleem komt algebraïsch neer op een onderzoek naar de eigenschappen van de som of het product van twee matrices. De algebraïsche behandeling is echter gekenmerkt door onoverzichtelijke en lange formules. Een meetkundige behandeling lijkt in dit geval meer de aangewezen weg.

Tot zoover loopt de gedachtegang vrijwel parallel aan enkele publicaties van A. Weissfloch, in het bijzonder diens Kreisgeometrische Vierpoltheorie (Hochfr. u. El. Ak. 61, 1943, 100-123). In dit proefschrift wordt voor de meetkundige behandeling echter een geheel andere weg ingeslagen.

Nadat in hoofdstuk III enkele resultaten betreffende de parallelschakeling worden afgeleid, wordt in de twee laatste hoofdstukken de cascade- of serieschakeling van verliesvrije vierpolen behandeld. Uiteengezet wordt hoe iedere transformatie door een verliesvrije vierpool overeenkomt met een beweging van het z.g. niet-euclidische vlak. In het complexe impedantievlak hebben we daarbij te maken met het z.g. model van Poincaré. De cascadeschakeling komt nu overeen met het samenstellen van niet-euclidische bewegingen. Deze samenstelling wordt vervolgens uitgevoerd, niet in het complexe vlak, maar in een daarmee samenhangend z.g. Cayley-diagram. In het laatste hoofdstuk worden toepassingen gegeven, samenhangende met de ultra korte golftechniek.

F. L. M. H. S. Stumpers. Eenige onderzoekingen over trillingen met frequentiemodulatie.

diss. Delft, Mei 1946.

In deze dissertatie, die gebaseerd is op het werk van den schrijver in het Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips, wordt na een kort overzicht der historische ontwikkeling nader ingegaan op de definities van momenteele amplitude, phase en frequentie voor een willekeurige functie van den tijd.

Het frequentiespectrum wordt bij amplitude-, phase-, en frequentiemodulatie onderzocht, en het begrip bandbreedte energetisch gedefinieerd.

Aan de mogelijkheid van de interferentie bij frequentiemodulatie wordt speciale aandacht geschonken (bijv. voor twee zenders op een golflengte, gesynchroniseerde zenders of twee-wegs ontvangst van eenzelfde signaal). De eigenschappen van de functie $f A(x, A) = \frac{A^2 + A \cos x}{1 + 2 A \cos x + A^2}$ zijn hiervoor van belang. De

invloed van geruisch en storingen wordt uitvoerig nagegaan. Het voordeel van frequentiemodulatie boven amplitudemodulatie, bij gelijke zendersterkte komt in een aantal numerieke voorbeelden goed tot uiting. Ook het belang van pre-emphasis voor omroepdoeleinden wordt hierbij toegelicht. De berekeningen worden gecompliceerd, wanneer de geruischenergie niet meer klein is ten opzichte van de signaalenergie. Voor dit geval wordt een benaderd resultaat gegeven. Bij impulsstoringen verkrijgt men, ook bij willekeurige grootteverhouding, een convergente ontwikkeling voor het resultaat na detectie.

Nadat de exacte berekening van de distorsie van f.m. signalen bij doorgang door elektrische netwerken met behulp der Fourier-analyse is gegeven, wordt de reeksontwikkeling van Carson en Fry kritisch onderzocht. Deze ontwikkeling is eigenlijk aangepast aan phasemodulatie; als alternatief wordt een andere reeks gegeven, evenals de eerste asymptotisch, die direct bij f.m. problemen aansluit. De fout, die ontstaat, wanneer men de reeks na enkele termen afbreekt, wordt geschat.

De theorie wordt daarna toegepast op de berekening van de distorsie bij eenige eenvoudige netwerken: enkele kring, gekoppelde kringen, frequentie detector. Naast het ontstaan van harmonischen bij één modulatiefrequentie wordt ook intermodulatie (dus het ontstaan van verschilfrequenties, wanneer tegelijk met twee l.f. signalen wordt gemoduleerd) berekend.

Tenslotte worden de resultaten van een aantal experimenten over distorsie en intermodulatie in een tiental grafieken weergegeven. Een nieuwe methode om de distorsie van den meetzender, als gevolg van kromming der modulatiekarakteristiek, rechtstreeks uit het spectrum te bepalen, kan in dit laatste hoofdstuk speciaal vermeld worden.

„OCTROOIEN”

Het bestuur van het Nederlandsch Radiogenootschap heeft besloten in het tijdschrift een rubriek „Octrooien” in te stellen, waarin alle belangrijk lijkende Nederlandsche octrooiaanvragen zullen worden vermeld, voor zoover zij op radio-, hoogfrequent-, kabeltelefonisch- en electroacoustisch gebied liggen. Er wordt dus een keuze gedaan, waarbij niet alleen gelet zal worden op de be-

langrijkheid van de octrooiaanvraag zelf, doch ook op de mogelijkheden die uit de uitvinding voortvloeien. Aangevangen wordt bij het begin van 1946.

Openbaar gemaakt 15 Maart 1946:

- O. A. 94730, kl. 21a¹³, N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken — Halfautomatisch opwekken van telegraafteekens. De punten en streepen worden opgewekt door een relaxatiegenerator, die trillingen opwekt zoodra de seinsleutel één van de beide arbeidsstanden inneemt. De drempelwaarde van een amplitudebegrenzer regelt de verhouding tusschen teekenlengte en tusschenruimte.
- O. A. 91343, kl. 21a^{241c2}. N.V. Philips' — Versterker met schermroosterbuis, welke een zeer breede freq. band, met inbegrip van zeer lage freq. gelijkmatig versterkt. Dimensioneering van impedanties in kathode- en/of schermroosterleiding en/of de gemeenschappelijke anode- en schermroosterleiding en van impedanties in de anode-leidingen tusschen anode en uitgangsklemmen.
- O. A. 95348 kl. 21a^{14h}. N.V. Philips' — Versterker van amplitudegemoduleerde trillingen, voorzien van tegenkoppeling, waarbij de gedetecteerde uitgangsspanning in tegenfase op de amplitudegemoduleerde trillingen wordt gemoduleerd doordat zij als voorspanning aan een parallel aan de ingangskring geschakelde diode met lekweerstand en condensator wordt toegevoerd.
- O. A. 93147, kl. 21a^{458e}. N.V. Philips'. — Schakeling met een apparaat met ontladingsbuizen en een reserveapparaat. Bij storing in het eerste apparaat wordt automatisch op het reserveapparaat overgeschakeld, bij storing in het reserveapparaat wordt automatisch teruggeschakeld op het 1ste apparaat. De overschakeling gebeurt zoo snel, dat geen bedrijfsstoring optreedt.
- O. A. 98017, kl. 21g^{13cla}. N.V. Philips'. — Indirect te verhitten kathode voor een elektrische ontladingsbuis. Door bijzondere materiaalkeuze is de warmteafleiding aan de uiteinden van de kathode zeer gering en de verwarming van de kathode gelijkmatiger.

Openbaar gemaakt 15 April 1946:

- O. A. 85685, kl. 21a^{49a}. N.V. Philips'. — Inrichting voor versterken of opwekken van trillingen met zeer hoge freq. met een looptijdbuis, waarin een rechtlijnige electronenbundel een aantal electroden passeert. Electronensnelheid, afstand en lengte van de electroden zijn zoodanig gekozen, dat de looptijd tusschen twee opeenvolgende electroden een oneven veelvoud van den halven trillingstijd is.
- O. A. 102863 kl. 21a^{429h}. Van der Heem N.V. — Radio-ontvangtoestel, waarvan de geneutrodyniseerde eindversterkersbuis in reflexschakeling tegelijk voor hoog- of middelfrequentversterking en voor laagfrequentversterking wordt gebruikt.

- O. A. 95141 kl. 21a⁴75. N.V. Philips'. — Electrisch apparaat met door spuiten of gieten vervaardigde verbindingsgeleiders, waarbij staafvormige condensatoren in een isoleerende draagplaat zijn gestoken. De verbindingen met de condensatoren worden door het spuiten of gieten verkregen, terwijl de condensatoren tevens de geleiders vast houden tegen de draagplaat.
- O. A. 94451, kl. 21g13h1. N.V. Philips'. — Versterker voor hoge frequenties met twee secundaire emissiebuizen, waarbij de ingangsketen en de uitgangsketen in balans zijn geschakeld.

Openbaar gemaakt 15 Mei 1946:

- O. A. 101793, kl. 21g13dl. Radio Corporation of America. — Werkwijze tot het vervaardigen van pompstengellooze ontladingsbuizen.
- O. A. 92839, wl. 21a⁴29b. Hazeltine Corporation. — Radio-ontvangschakeling, waarbij een automatische sterkteregeling veroorzaakt wordt door een tegenkoppeling in de ingangsversterkersbuis, welke tegenkoppeling geregeld wordt door signaalspanning.

Mededeelingen

Verbond van Wetenschappelijke Onderzoekers.

Dit verbond streeft naar versterking van de maatschappelijke positie van den wetenschappelijken onderzoeker, naar de grootst mogelijke ontplooiing van het wetenschappelijk onderzoek en naar de verdieping van het maatschappelijk verantwoordelijkheidsgevoel bij den onderzoeker, opdat de wetenschap haar hoogste rendement voor mensch en samenwerking zal bereiken.

Het is opgericht 13 Juli 1946; het secretariaat is gevestigd Langebrug 111 te Leiden, Dr J. Korringa.

Vergaderingen

Nederlandsch Radio Genootschap.

75e Zitting op Vrijdag 11 October 1946, te 13.30 uur in het gebouw van het Kon. Instituut van Ingenieurs, Prinsessegracht 23, 's Gravenhage.

Voordracht te houden door Dr H. Bremmer, over het onderwerp:

„Voortplanting van Radiogolven in verband met de inhomogeniteit van de aardatmosfeer”.

Verslag van het examen Radio-technicus en monteur, gehouden in Maart en Juni 1946.

Het schriftelijk examen Radio-technicus en Radio-monteur werd gehouden op 29 Maart 1946. Aangemeld hadden zich 52 kandidaten voor technicus en 108 voor monteur. Wegens onvoldoend schriftelijk examen werden afgewezen 13 kandidaten technicus en 9 kandidaten monteur, zoodat voor het mondeling gedeelte werden opgeroepen 39 cand. technicus en 99 cand. monteur, welk mondeling

examen werd gehouden op 3-4-5-11-12 en 13 Juni 1946. 3 cand. monteur waren niet opgekomen.

Afgewezen werden 16 cand. technicus en 36 cand. monteur, terwijl 2 cand. monteur voor een herexamen in aanmerking werden gebracht.

Geslaagd zijn in totaal 23 cand. technicus en 55 cand. monteur, benevens 3 kandidaten monteur die een herexamen moesten afleggen.

Geslaagd voor technicus:

J. van Sandwijk	Utrecht	J. Kok	Haarlem
J. Rinkel	Amsterdam	G. J. Woudenberg	Bussum
G. W. de Vries	Eindhoven	J. A. de Gruyl	Hilversum
E. de Boer	Amsterdam	H. van 't Hof	Hilversum
B. Peelen	Amsterdam	Th. M. W. v. Velthoven	Bussum
J. F. Kuipers	Hilversum	D. Ypey	Hilversum
P. J. Hooymans	Amsterdam	J. J. Hoogervorst	Bennebroek
J. G. Coster	Amsterdam	J. J. C. Cornelissen	Eindhoven
A. C. Killestein	Den Haag	W. G. Horst	Hilversum
A. Mühlbaum	Amsterdam	P. Visser	Rijswijk
C. D. Ouwehand	Gorssel	M. A. Ram	Hilversum
G. J. Kamps	Dordrecht		

Geslaagd voor monteur:

J. A. Westerhout	Utrecht	D. J. Schram Jr.	Vianen
C. Smits	Gemert	J. de Jong	Hilversum
J. A. Stellingwerf	Leeuwarden	F. A. v. Breemen	Bussum
D. J. Vlessert	Zutphen	C. de Vos	Utrecht
Th. van Onzen	Den Haag	E. Bosch	Bussum
J. A. Bartelet	Tegelen	D. Kleefstra	Oldeboorn
M. Schaap	Hilversum	A. Heyboer	Aalst (Waalre)
J. H. G. Frencken	Helden	C. A. Worp	Callantsoog
A. S. Andriess	Eindhoven	B. Pellen	Amsterdam
F. W. v. Houweninge	Hilversum	D. A. Breurkes	Den Haag
Th. Grootendorst	Weesp	Th. A. M. Veeken	Limmen
J. Paes	Amsterdam	R. B. Koops	Sappermeer
J. A. M. Post	Rotterdam	H. Meyer	Veendam
J. Bakker	Rotterdam	E. H. Boiten	Veendam
A. F. de Jong	Rotterdam	D. Davidson	Amsterdam
A. M. Schoor	Rotterdam	E. J. Smit	Amsterdam
R. J. R. Wewer	Driebergen	G. v. d. Wal	Haarlem
J. J. van den Raadt	Vijfhuizen	J. Bierdrager	Eindhoven
J. v. Sandwijk	Utrecht	C. J. Schouten	Harmelen
A. Reijnierse	Rotterdam	C. Baas	Hilversum
J. D. Schram	Vianen	A. Hagedoorn	Huizen
R. T. Korvemaker	Baarn	F. V. F. M. Kenkel	Baarn
H. G. Th. v. Dijk	Bussum	C. P. L. Alders	Hilversum
C. de Jong	Baarn	A. H. v. Schaik Jr	Vreeland
J. Th. de Jong	Baarn	J. J. Steijn	Kortenhoeve
J. H. Hidden	Hilversum	L. T. M. Rokebrand	Blaricum
H. B. Truyens	Laren (N.H.)	M. v. d. Valk	Amsterdam
A. J. Lodder	Hilversum	G. J. Kooyman	Amsterdam
B. Peelen	Amsterdam	W. H. v. Kesteren	Amsterdam