

## Een elektronische analoge correlator

door C. van Schooneveld \*)

Voordracht gehouden voor het Nederlands Radiogenootschap en de  
Sectie Telecommunicatietechniek van het K.I.v.I. op 16 oktober 1956.

### Samenvatting

Dit artikel bevat een beschouwing van de achtergrond van het correlatiebegrip, zoals dat de laatste jaren zo'n belangrijke rol is gaan spelen in de communicatietheorie. Tevens wordt een beschrijving gegeven van een eenvoudige elektronische analoge apparatuur, die in staat is correlatiefuncties te bepalen. De resultaten van enkele experimenten met deze correlator worden besproken.

### 1. Correlatie

#### 1.0. *Inleiding.*

Tussen de twee grootheden  $x$  en  $y$  bestaat correlatie als deze grootheden een zekere samenhang vertonen; als zij op een of andere manier van elkaar afhankelijk zijn. Het is duidelijk dat  $x$  en  $y$  volledig gecorreleerd zijn als er tussen  $x$  en  $y$  een functioneel verband bestaat:  $y = f(x)$ .

Het is echter ook mogelijk dat tussen  $x$  en  $y$  slechts een statistisch verband aanwezig is. Hiervan zijn vele voorbeelden te geven, men denke bijv. aan de overeenkomst in de regenval van dag tot dag op twee plaatsen die niet te ver van elkaar verwijderd zijn. In deze gevallen wordt de waarde van  $x$  en van  $y$  door een kansverdeling bepaald en is dus tamelijk onzeker. Is echter van een van beide grootheden de waarde bekend, dan kan met veel grotere zekerheid iets omtrent de andere worden gezegd.

Een dergelijk statistisch verband kan in sterke of in zwakke mate aanwezig zijn. Het doel van deze paragraaf is aan te geven hoe m.b.v. de waarschijnlijkheidsrekening voor deze z.g. correlatie een kwantitatieve maat wordt afgeleid.

\*) Fysisch Laboratorium RVO-TNO.

### 1.1. *Continue waarschijnlijkheidsdichtheidsverdelingen.*

Gegeven zijn twee stochastische variabelen  $x$  en  $y$ , die steeds gecombineerd uitkomen. Voor elke combinatie  $(x, y)$  is een kans gegeven:

$$(1.11) \quad p(x, y).$$

$p(x, y)$  is een zg. continue waarschijnlijkheidsdichtheidsverdeling. Dat betekent dat de kans op het optreden van een waarde van  $x$  tussen  $x_1$  en  $x_1 + dx$  en van een waarde van  $y$  tussen  $y_1$  en  $y_1 + dy$  gegeven wordt door  $p(x_1, y_1) dx dy$ . Alle verdelingen die in het verloop van dit artikel ter sprake komen, zowel die voor één als voor meerdere variabelen, zijn van hetzelfde type: continue waarschijnlijkheidsdichtheidsverdeling. Daarom wordt voortaan gesproken van waarschijnlijkheids- of kansverdeling (w.h.verd.) of kortweg van verdeling.

Uit (1.11) kunnen door integratie de verdelingen worden gevonden voor  $x$  en  $y$  afzonderlijk:

$$(1.12) \quad p_1(x) = \int p(x, y) dy$$

$$(1.13) \quad p_2(y) = \int p(x, y) dx$$

$p_1(x)$  geeft de kans op  $x$ , ongeacht de bijbehorende waarde van  $y$ . Iets overeenkomstigs geldt voor  $p_2(y)$ .

### 1.2. *Gemiddelde waarde.*

Als  $f(x, y)$  een functie is van  $x$  en  $y$ , is de gemiddelde waarde  $\bar{f}(x, y)$  (gewogen gemiddelde, mathematische verwachting) gelijk aan:

$$(1.21) \quad \bar{f}(x, y) = \iint f(x, y) p(x, y) dx dy$$

Zo is:

$$(1.22) \quad \bar{x} = \iint x p(x, y) dx dy = \int x p_1(x) dx$$

$$(1.23) \quad \bar{x^2} = \iint x^2 p(x, y) dx dy = \int x^2 p_1(x) dx$$

Op overeenkomstige wijze worden  $\bar{y}$  en  $\bar{y^2}$  gevonden. Zonder schade toe te brengen aan de algemeenheid van de navolgende beschouwingen kan worden gesteld:

$$(1.24) \quad \bar{x} = \bar{y} = 0 \quad \text{en} \quad \bar{x^2} = \bar{y^2} = \sigma^2$$

Van groot belang is verder de gemiddelde waarde van het product  $xy$ :

$$(1.25) \quad \overline{xy} = \iint xy p(x, y) dx dy$$

Voor  $\overline{xy}$  kan op eenvoudige wijze worden bewezen:

$$(1.26) \quad -\sigma^2 \leq \overline{xy} \leq \sigma^2$$

(Hierbij wordt uitgegaan van het feit dat  $\overline{(u x - v y)^2} \geq 0$  voor elke  $u$  en  $v$ . Substitutie van  $u = \overline{xy}$  en  $v = \sigma^2$  levert dan:  $(\overline{xy})^2 \leq \sigma^4$ ).

Indien gesteld wordt

$$(1.27) \quad \overline{xy} = \rho \sigma^2 \quad \text{geldt dus}$$

$$(1.28) \quad -1 \leq \rho \leq +1$$

### 1.3. Het algemene begrip correlatie.

Voor  $p(x, y)$  kan worden geschreven:

$$(1.31) \quad p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y) \quad p_x(y) = p_2(y) \quad p_y(x)$$

Hiermee zijn twee nieuwe verdelingen  $p_x(y)$  en  $p_y(x)$  ingevoerd, die goed moeten worden onderscheiden van de verdelingen  $p_2(y)$  en  $p_1(x)$ .

$p_x(y)$  = de conditionele w.h.verd. voor  $y$  = de kans op een zekere waarde van  $y$  als gegeven is dat  $x$  een bepaalde waarde bezit (1.32)

$p_y(x)$  heeft een analoge betekenis voor  $x$  (1.33)

Met deze conditionele verdelingen kan tot uitdrukking worden gebracht hoe bij een zekere waarde van  $x$  een voorkeur bestaat voor een aantal waarden van  $y$ , en omgekeerd.

Als illustratie is in fig. 1.31 het  $xy$ -vlak en de verdeling  $p(x, y)$  getekend. De waarde van  $p(x, y)$  is recht evenredig met de zwarting van de figuur. Voorts zijn aangegeven de verdelingen  $p_1(x)$  en  $p_2(y)$ , terwijl de verdeling  $p_x(y)$  getekend is voor twee waarden van  $x$ , nl.  $x_1$  en  $x_2$ .

Het is duidelijk dat in het geval van fig. 1.31 de verdeling  $p_x(y)$  sterk afhankelijk is van  $x$ . Omgekeerd is op dezelfde wijze  $p_y(x)$  afhankelijk van  $y$ .

Een dergelijke onderlinge afhankelijkheid tussen  $x$  en  $y$  is nu het typische kenmerk van correlatie. Er bestaat tussen  $x$



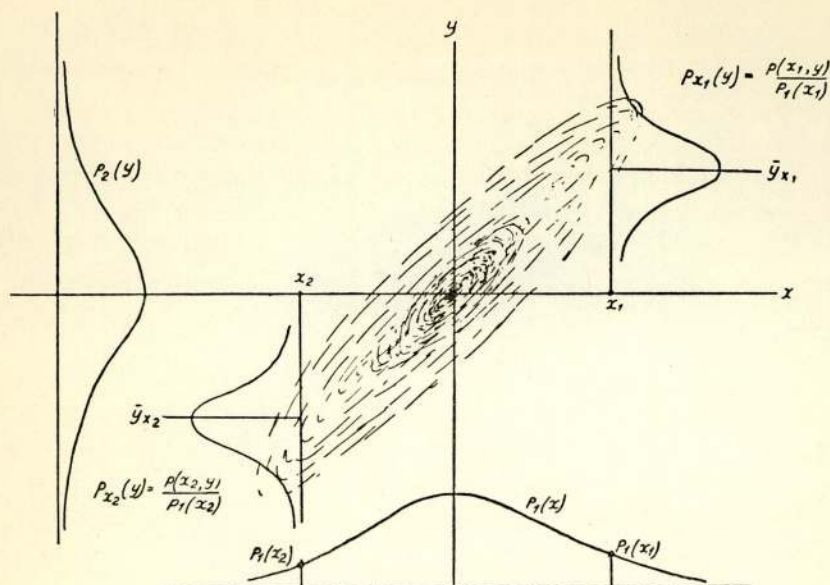


Fig. 1.31.

en  $y$  een statistisch verband. In het algemeen kan dan ook worden gesteld:

a. Er is correlatie tussen  $x$  en  $y$  als

$$(1.34) \quad \begin{aligned} p_x(y) &\neq p_2(y) \text{ voor enige waarde van } x \\ p_y(x) &\neq p_1(x) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad y. \end{aligned}$$

b. Er is geen correlatie tussen  $x$  en  $y$  als

$$(1.35) \quad \begin{aligned} p_x(y) &= p_2(y) \text{ voor alle waarden van } x \\ p_y(x) &= p_1(x) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad y. \end{aligned}$$

In geval b. zijn dus de cond. w.h.verd. voor  $x$  en  $y$  gelijk aan de niet-cond. verdelingen en kan voor (1.31) worden geschreven:

$$(1.36) \quad p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$$

#### 1.4. Lineaire correlatie.

Thans wordt nagegaan in hoeverre het statistisch verband tussen  $x$  en  $y$  lineair is. In par. 1.3 is aangegeven hoe, afhankelijk van de verdeling  $p_x(y)$ , er bij een bepaalde waarde van  $x$  een aantal waarden van  $y$  kan optreden. Het gemiddelde van deze waarden wordt  $\bar{y}_x$  genoemd (zie fig. 1.31). Evenzo be-



staat er een gemiddelde waarde  $\bar{x}_y$ , behorende bij een zekere  $y$ . Indien in grote trekken het verband tussen  $\bar{y}_x$  en de bijbehorende  $x$  en tussen  $\bar{x}_y$  en de bijbehorende  $y$ , lineair is, wordt er gesproken van een lineair statistisch verband tussen  $x$  en  $y$ . In het geval van fig. 1.31 treedt zo'n lineair verband duidelijk op de voorgrond.

Afhankelijk van het karakter van de verdeling  $p(x, y)$  zal een dergelijk verband in grote of in geringe mate aanwezig zijn. Er dient dus voor deze lineaire correlatie een kwantitatieve maat te worden gevonden. Dit geschiedt als volgt:

Stel dat het gezochte lineaire verband tussen  $y$  en  $x$  wordt gegeven door de rechte  $y = ax$ . Welke waarde van  $a$  voldoet dan het beste? Het antwoord op deze vraag wordt gegeven met het principe van de kleinste kwadratische som:

De afstand  $d$  van een willekeurig punt  $(x, y)$  tot de rechte  $y = ax$  is gelijk aan

$$(1.41) \quad d = \frac{y - ax}{\sqrt{1 + a^2}}$$

De gemiddelde waarde  $\overline{d^2}$  is dus gelijk aan:

$$(1.42) \quad \overline{d^2} = \iint \frac{(y - ax)^2}{1 + a^2} p(x, y) dx dy$$

De optimale waarde van  $a$  is die waarde, waarvoor  $\overline{d^2}$  minimaal is. Deze waarde wordt gevonden uit

$$(1.43) \quad \frac{\partial}{\partial a} (\overline{d^2}) = \frac{\partial}{\partial a} \iint \frac{(y - ax)^2}{1 + a^2} p(x, y) dx dy = 0$$

Deze vergelijking heeft als oplossing:

$$(1.44) \quad a = \pm 1$$

De extrema van  $\overline{d^2}$  worden gevonden door substitutie van (1.44) in (1.42). Dit levert op:

$$(1.45) \quad \overline{d^2} = \sigma^2 (1 \mp \varrho)$$

Hierin is  $\varrho = \frac{\overline{xy}}{\sigma^2}$  (zie par. 1.2)

Indien  $\varrho > 0$  geeft  $a = +1$  het minimum van  $\overline{d^2}$  en  $a = -1$  het maximum. Het gezochte statistische verband tussen  $\bar{x}$  en  $y$  wordt dan bepaald door de lijn  $y = x$ . De waarde van  $\overline{d^2}$  geeft de spreiding van de verdeling  $p(x, y)$  om deze lijn en is dus bepalend voor wat men de slankheid van de verdeling zou

kunnen noemen. Het ligt nu voor de hand om deze spreiding als maatgevend te beschouwen voor de lineaire correlatie. Immers, is de spreiding  $\overline{d^2}$  groot, dan bestaat er bij een gegeven  $x$  nog grote onzekerheid omtrent de bijbehorende waarde van  $y$ . Deze onzekerheid neemt af met  $\overline{d^2}$ . Aangezien  $\sigma^2$  een constante is, wordt  $\overline{d^2}$  uitsluitend bepaald door  $\rho$ .

Voor  $\overline{d^2} = 0$  heeft de gehele verdeling zich samengetrokken boven de lijn  $y = x$ ; er bestaat dan een eenduidig lineair verband tussen  $y$  en  $x$  en de lineaire correlatie is maximaal. Dit geval treedt op als  $\rho = 1$  (zie form. 1.45). Precies dezelfde beschouwingen gelden indien  $\rho < 0$ , met dien verstande dat nu de minimale waarde van  $\overline{d^2}$  wordt gegeven door de lijn  $y = -x$  en de maximale waarde door  $y = x$ . Voor  $\rho = -1$  is de correlatie weer maximaal. Voor  $\rho = 0$  is  $\overline{d^2} = \sigma^2$ . De spreiding om de lijn  $y = x$  is nu precies even groot als die om de lijn  $y = -x$ . De correlatie is nu minimaal; er bestaat tussen  $x$  en  $y$  niet het geringste lineaire verband.

Het gedrag van  $p(x, y)$  voor verschillende waarden van  $\rho$  is aangegeven in fig. 1.42.

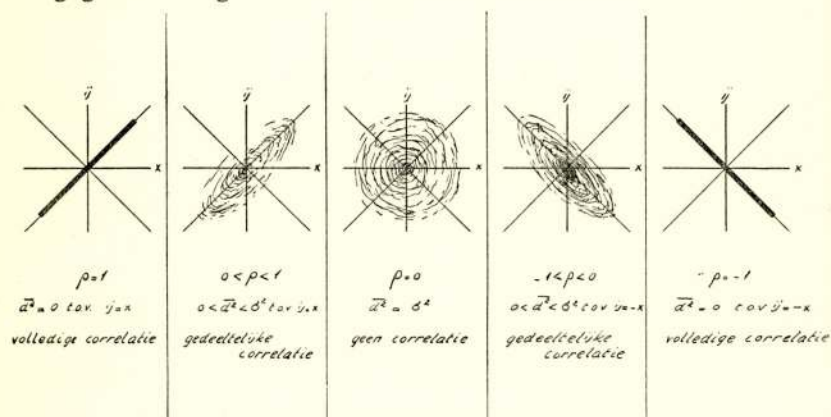


Fig. 1.42.

De verdeling  $p(x, y)$  bij verschillende waarden van  $\rho$ .

Op grond van bovenstaande beschouwingen wordt  $\rho$  aangenomen als maat voor de lineaire correlatie. Deze zg. coëfficiënt van correlatie wordt volgens (1.27) gevonden uit

$$(1.46) \quad \rho = \frac{\overline{xy}}{\sigma^2}$$

zodat, aangezien  $\sigma^2$  constant is, het gemiddelde product  $\overline{xy}$  de bepalende factor is voor de lineaire correlatie tussen  $x$  en  $y$ .

In het vervolg zal zonder meer worden gesproken van correlatie. Hiermede wordt dan altijd de in deze paragraaf beschouwde lineaire correlatie bedoeld.

## 2. Toepassing op signalen

### 2.1. Inleiding.

De in par. 1.4 gevonden formule (1.46) voor de correlatie tussen twee variabelen  $x$  en  $y$  wordt nu toegepast op grootheden  $x(t)$  en  $y(t)$ , die fluctueren als functie van de tijd. Deze grootheden, in het vervolg aangeduid met de term „signalen”, zijn in het algemeen van het informatie-dragende type. In de Engelse en Amerikaanse literatuur worden deze signalen dikwijls „random” signalen genoemd. Hun gedrag als functie van de tijd wordt slechts bepaald door een aantal w.h.verdelingen. Het kan niet, zoals bij periodieke of aperiodieke signalen, volledig worden vastgelegd met een wiskundige formule.

Om op dergelijke signalen de correlatiemethode te kunnen toepassen is het nodig dat zij voldoen aan een tweetal voorwaarden, die in de paragrafen 2.2 en 2.8 worden gesteld.

### 2.2. Voorwaarde 1.

De signalen  $x(t)$  en  $y(t)$  moeten stationaire signalen zijn. Een signaal is stationair wanneer de w.h.verdelingen, waardoor dat signaal bestuurd wordt, onafhankelijk zijn van de tijd.

De absolute waarde van de tijd is dus niet van belang. Daarentegen speelt het begrip tijdsduur wel een grote rol. De belangrijkste verdelingen, die met  $x(t)$  en  $y(t)$  samenhangen, worden in de paragrafen 2.3 t/m 2.7 gegeven.

### 2.3. Gecombineerde verdelingen.

$p_1(x_1, x_2, \tau)$  = de kans dat  $x(t)$  op een willekeurig ogenblik de waarde  $x_1$  aanneemt en  $\tau$  sec later de waarde  $x_2$  = de kans op de combinatie  $(x_1, x_2, \tau)$  (2.31)

$p_2(y_1, y_2, \tau)$  = de kans op de combinatie  $(y_1, y_2, \tau)$  (2.32)

$p_3(x, y, \tau)$  = de kans op het aantreffen van een waarde  $x$  van  $x(t)$  en  $\tau$  sec later een waarde  $y$  van  $y(t)$  = de kans op de combinatie  $(x, y, \tau)$  (2.33)

### 2.4. Enkelvoudige verdelingen.

Door integratie volgen uit (2.31), (2.32) en (2.33) de twee verdelingen voor  $x$  en  $y$ :



$$p_1(x) = \int p_1(x_1, x_2, \tau) dx_2 = \int p_3(x, y, \tau) dy \quad (2.41)$$

$$p_2(y) = \int p_2(y_1, y_2, \tau) dy_2 = \int p_3(x, y, \tau) dx \quad (2.42)$$

Hierin is  $p_1(x)$  = de kans dat op een willekeurig tijdstip  $x(t)$  de waarde  $x$  aanneemt.

$p_2(y)$  heeft weer een overeenkomstige betekenis voor  $y(t)$ .

2.5. Uit (2.31) en (2.32) volgt direct dat, voor  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned} p_1(x_1, x_2, 0) &= 0 \text{ indien } x_1 \neq x_2 \\ &= p_1(x_1) \text{ indien } x_1 = x_2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} p_2(y_1, y_2, 0) &= 0 \text{ indien } y_1 \neq y_2 \\ &= p_2(y_1) \text{ indien } y_1 = y_2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

## 2.6. *Conditionele verdelingen.*

Evenals in par. 1.3 worden thans enige conditionele verdelingen ingevoerd. Zo geldt voor  $p_1(x_1, x_2, \tau)$ :

$$p_1(x_1, x_2, \tau) = p_1(x_1) \cdot p_{x_1}(x_2, \tau) \quad (2.61)$$

$p_{x_1}(x_2, \tau)$  = conditionele w.h.verd. voor  $x(t)$  = de kans dat, als gegeven is dat op een willekeurig ogenblik  $x(t)$  de waarde  $x_1$  bezat, datzelfde signaal  $\tau$  sec later de waarde  $x_2$  aanneemt. (2.62)

Als  $p_{x_1}(x_2, \tau)$  afhankelijk is van  $x_1$ , dus verschillend van  $p_1(x)$ , wordt de kans op een bepaalde signaalwaarde beïnvloed door de waarde, die dat signaal  $\tau$  sec tevoren heeft gehad. Er bestaat dan correlatie tussen de waarden, die  $x(t)$  met onderlinge afstand  $\tau$  aanneemt. Is er om een of andere reden geen correlatie (bijv. bij zeer grote  $\tau$ ), dan geldt:

$$p_1(x_1, x_2, \tau) = p_1(x_1) \cdot p_1(x_2) \quad (2.63)$$

De conditionele w.h.verd.  $p_{x_1}(x_2, \tau)$  is dan overgegaan in de verdeling  $p_1(x)$ .

Op dezelfde wijze worden  $p_{y_1}(y_2, \tau)$  en  $p_x(y, \tau)$  gevonden.

$p_x(y, \tau)$  = conditionele verdeling voor  $y(t)$  = de kans dat, als gegeven is dat  $x(t)$  op een willekeurig tijdstip de waarde  $x$  bezat, het signaal  $y(t)$   $\tau$  sec. later de waarde  $y$  aanneemt. (2.64)

De verdeling (2.62) is bepalend voor de onderlinge afhankelijkheid van de waarden van één signaal, nl.  $x(t)$ . De verdeling (2.64) geeft de afhankelijkheid van de waarden van  $y(t)$  van die van  $x(t)$  en bepaalt zo de correlatie tussen de twee signalen  $x(t)$  en  $y(t)$ .

2.7. In overeenstemming met par. 2.5 geldt bij  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned} p_{x_1}(x_2, 0) &= 0 \text{ voor } x_1 \neq x_2 \\ &= 1 \quad ,, \quad x_1 = x_2 \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} p_{y_1}(y_2, 0) &= 0 \text{ voor } y_1 \neq y_2 \\ &= 1 \quad ,, \quad y_1 = y_2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

2.8. *Voorwaarde 2.*

De kans op het optreden van een bepaalde signaalwaarde mag niet afhankelijk zijn van de waarden, die de signalen lange tijd tevoren hebben bezeten.

Voor  $x(t)$  betekent dit dus:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} p(x_1, x_2, \tau) = p_1(x_1) \cdot p_1(x_2) \quad (2.81)$$

m.a.w., voor toenemende  $\tau$  moet de cond. w.h.verd.  $p_{x_1}(x_2, \tau)$  overgaan in de niet-cond. w.h.verd.  $p_1(x)$ .

Overeenkomstige betrekkingen gelden voor het signaal  $y(t)$  en voor het verband tussen  $x(t)$  en  $y(t)$ .

Als aan deze voorwaarden voldaan is bezitten de signalen de eigenschap dat zij op den duur alle waarden doorlopen precies in overeenstemming met hun w.h.verdelingen. De frequenties waarmee in de loop van de tijd de combinaties  $(x_1, x_2, \tau)$ ,  $(y_1, y_2, \tau)$  en  $(x, y, \tau)$  worden aangetroffen, zijn precies gelijk aan de kansen op deze combinaties, dus aan resp.  $p_1(x_1, x_2, \tau)$ ,  $p_2(y_1, y_2, \tau)$  en  $p_3(x, y, \tau)$ . Ook de frequenties van voorkomen van de waarden  $x$  en  $y$  komen overeen met  $p_1(x)$  en  $p_2(y)$ . Deze eigenschap heet de „ergodische eigenschap”.

2.9. *De gemiddelde waarde van  $f(x, y)$ .*

Volgens (1.20) geldt voor de gemiddelde waarde van een functie  $f(x, y)$ :

$$\bar{f}(x, y) = \iint f(x, y) p(x, y) dx dy \quad (2.91)$$

Omdat echter  $x(t)$  en  $y(t)$  als functie van de tijd zich pre-

cies volgens hun w.h.verdelingen gedragen, kan  $\bar{f}(x, y)$  ook als een tijdgemiddelde worden berekend:

$$\bar{f}(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f[x(t), y(t)] dt \quad (2.92)$$

De functie  $f(x, y)$  wordt hier dus gemiddeld over een interval van lengte  $2T$ . Door dit interval onbegrensd te laten toenemen wordt een middeling over de gehele tijd verkregen. De formules (2.91) en (2.92) geven samen de belangrijke eigenschap:

$$\bar{f}(x, y) = \iint f(x, y) p(x, y) dx dy = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f[x(t), y(t)] dt \quad (2.93)$$

## 2.10. Gemiddelde waarden.

Als toepassing van (2.93) kunnen nu enkele gemiddelde waarden worden berekend.

$$\text{a. } \bar{x} = \int x p_1(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.101)$$

Op overeenkomstige wijze wordt  $\bar{y}$  gevonden.

$\bar{x}$  en  $\bar{y}$  stellen voor de gelijkspanningscomponenten van de signalen  $x(t)$  en  $y(t)$ . Evenals in par. 1 wordt gesteld  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ .

$$\text{b. } \overline{x^2} = \int x^2 p_1(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \quad (2.103)$$

Op analoge wijze wordt weer  $\overline{y^2}$  bepaald.

Als  $x(t)$  en  $y(t)$  een stroom of spanning voorstellen, geven  $\overline{x^2}$  en  $\overline{y^2}$  het gemiddelde vermogen, dat door de signalen wordt afgegeven aan een weerstand van  $1 \Omega$ . Daarom heten  $\overline{x^2}$  en  $\overline{y^2}$  kortweg „het vermogen” van de signalen  $x(t)$  en  $y(t)$ . Voor  $\overline{x^2}$  en  $\overline{y^2}$  geldt weer  $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \sigma^2$

$$\begin{aligned} \text{c. } \varphi_{xx}(\tau) &= \overline{x_1 x_2} = \iint x_1 x_2 p_1(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (2.104)$$



$$\begin{aligned}\varphi_{yy}(\tau) &= \overline{y_1 y_2} = \iint y_1 y_2 p_2(y_1, y_2, \tau) dy_1 dy_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t) y(t + \tau) dt\end{aligned}\quad (2.105)$$

Volgens par. 1.4 geeft  $\varphi_{xx}(\tau)$  de correlatie tussen de waarden, die het signaal  $x(t)$  aanneemt op twee tijdstippen, die  $\tau$  sec uiteen liggen. Deze correlatie is natuurlijk afhankelijk van  $\tau$ . De functie  $\varphi_{xx}(\tau)$  heeft slechts betrekking op één signaal, nl.  $x(t)$  en heet daarom de *autocorrelatiefunctie* van  $x(t)$ .

Evenzo is  $\varphi_{yy}(\tau)$  de autocorrelatiefunctie van  $y(t)$ .

$$\varphi_{xy}(\tau) = \overline{xy} = \iint xy p_3(x, y, \tau) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt\quad (2.106)$$

De waarde van  $\varphi_{xy}(\tau)$  stelt voor de correlatie tussen de signalen  $x(t)$  en  $y(t)$  op twee tijdstippen, die  $\tau$  sec uiteen liggen. Omdat hier een verband gelegd wordt tussen twee verschillende signalen heet  $\varphi_{xy}(\tau)$  de *kruiscorrelatiefunctie* van  $x(t)$  en  $y(t)$ .

### 3. De autocorrelatiefunctie.

3.1. De autocorrelatiefunctie van het signaal  $x(t)$  is gelijk aan:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \iint x_1 x_2 p_1(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt$$

Deze functie bezit een aantal belangrijke eigenschappen, die in de volgende paragrafen worden opgesomd.

3.2.  $\varphi_{xx}(\tau)$  is bepalend voor de onderlinge lineaire afhankelijkheid van de signaalwaarden van  $x(t)$ .

$\varphi_{xx}(\tau)$  wordt uitsluitend bepaald door de w.h.verdeling  $p_1(x_1, x_2, \tau)$  en is dus invariant voor de gehele groep van signalen, die door deze zelfde verdeling bestuurd worden.

Er kunnen echter nog andere groepen van signalen bestaan, bestuurd door andere w.h.verdelingen, die dezelfde  $\varphi_{xx}(\tau)$  bezitten. Het is dan ook onmogelijk om uit  $\varphi_{xx}(\tau)$  de verdeling  $p_1(x_1, x_2, \tau)$  terug te vinden. Deze verdeling bevat meer gegevens omtrent het signaal dan de autocorrelatiefunctie. Een gedeelte hiervan

gaat verloren bij de overgang van  $p_1(x_1, x_2, \tau)$  naar  $\varphi_{xx}(\tau)$ . De oorzaak hiervan is dat  $\varphi_{xx}(\tau)$  slechts een gemiddelde waarde is.

$$3.3. \quad \varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau) \quad (3.31)$$

$\varphi_{xx}(\tau)$  is een even functie van  $\tau$ . Dit volgt direct uit de voorwaarde dat  $x(t)$  een stationair signaal is.

3.4. Met formule (2.51) blijkt dat voor  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(0) &= \iint x_1 x_2 p_1(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = \int x^2 p_1(x) dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \overline{x^2} = \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\text{Voor } \varphi_{xx}(0) \text{ geldt: } \varphi_{xx}(0) \geq |\varphi_{xx}(\tau)| \quad (3.42)$$

Deze eigenschap, die dezelfde is als in form. (1.26), is ook fysisch direct in te zien. Immers,  $\varphi_{xx}(\tau)$  stelt voor de correlatie tussen de signaalwaarden bij een onderlinge afstand  $\tau$ . Indien  $\tau = 0$  zijn deze signaalwaarden steeds aan elkaar gelijk en moet de correlatie dus wel maximaal zijn.

$$3.5. \quad \varphi_{xx}(\tau) \rightarrow 0 \text{ voor } \tau \rightarrow \infty \quad (3.51)$$

Dat bij toenemende  $\tau$  de autocorrelatie moet afnemen volgt uit de voorwaarde 2, die zegt dat de w.h.verd. voor  $x_2$  niet meer afhankelijk mag zijn van de waarde  $x_1$ , die lange tijd tevoren is opgetreden (2.81).

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(\tau) &= \iint x_1 x_2 p_1(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \int x_1 p_1(x_1) dx_1 \cdot \\ &\quad \int x_2 p_2(x_2) dx_2 = 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

3.6. De autocorrelatiefunctie en het vermogensdichtheids-spectrum van  $x(t)$  vormen samen een Fourier-transformatiepaar.

Het vermogensdichtheids-spectrum van  $x(t)$  zij  $\Phi_{xx}(f)$ . Dit betekent dat het gemiddelde vermogen, dat vervat is in een bandje ter breedte van  $df$  Hertz gelijk is aan  $\Phi_{xx}(f) df$ .  $\Phi_{xx}(f)$  is een even, reële, niet-negatieve functie van  $f$ . Nu geldt dus:

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (3.61)$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) e^{2\pi j f \tau} df \quad (3.61)$$

Dat er een verband moet bestaan tussen de autocorrelatiefunctie en de frequentie-inhoud van een signaal is reeds te begrijpen uit een eenvoudige beschouwing:

Bij grote bandbreedte bezit het signaal de mogelijkheid om in korte tijd een geheel nieuwe waarde aan te nemen. De snelheid waarmee in (2.81) de verdeling  $p_1(x_1, x_2, \tau)$  overgaat in  $p_1(x_1) \cdot p_1(x_2)$  is groot. De tijdsduur waarover zich de onderlinge beïnvloeding van de signaalwaarden uitstrekt is kort en de correlatie zal als functie van  $\tau$  snel tot nul naderen. Omgekeerd zal bij geringe bandbreedte de correlatiefunctie slechts langzaam afnemen met  $\tau$ .

Formule (3.61) zegt dat kennis van de autocorrelatiefunctie en van het vermogensdichtheidsspectrum van een signaal volkomen equivalent zijn. Als een van de twee bekend is kan de andere daaruit altijd worden gevonden. De gehele groep van signalen, die alle door dezelfde verdeling  $p_1(x_1, x_2, \tau)$  worden bestuurd heeft dus niet alleen dezelfde autocorrelatiefunctie, maar bezit ook hetzelfde spectrum.

3.7. Samenvattend geldt dus:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \iint x_1 x_2 p_1(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \quad (3.71)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (3.72)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f) e^{2\pi j f \tau} df \quad (3.73)$$

Als de w.h.verd. voor  $x(t)$  bekend is wordt  $\varphi_{xx}(\tau)$  berekend m.b.v. (3.71). Is het spectrum gegeven, dan kan (3.73) worden toegepast. Deze beide methoden lenen zich vooral voor berekeningen. Indien het signaal  $x(t)$  zelve bekend is, kan  $\varphi_{xx}(\tau)$  met (3.72) gevonden worden. Deze methode is zeer geschikt voor experimentele bepaling van  $\varphi_{xx}(\tau)$ . Het signaal kan dan bijv. door een automatisch rekenapparaat waargenomen en daarna verwerkt worden.



#### 4. Voorbeelden van autocorrelatie.

4.1. In de paragrafen 4.2 t/m 4.4 worden enkele veel voorkomende autocorrelatiefuncties besproken, terwijl in par. 4.5 een belangrijke toepassing wordt aangegeven van de correlatiemethode.

##### 4.2. Autocorrelatie van een sinusvormig signaal.

Gegeven is het signaal  $x(t) = a_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ . Dan is de autocorrelatiefunctie gelijk aan:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x(t + \tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} a_n^2 \cos[n\omega t + \varphi_n] \cos[n\omega(t + \tau) + \varphi_n] dt = \\ &= \frac{1}{2} a_n^2 \cos n\omega\tau \end{aligned} \quad (4.21)$$

Het blijkt dus dat de autocorrelatie van een sinusvormig signaal een cosinus-functie oplevert, waarin de oorspronkelijke amplitude en frequentie bewaard blijven, doch waaruit de fase verdwenen is.

##### 4.3. Autocorrelatie van een periodiek signaal.

Gegeven is het periodieke signaal  $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ .

Dan is, zoals op eenvoudige wijze blijkt,

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 \cos n\omega\tau \quad (4.31)$$

Ook hier worden de frequenties en amplituden van de oorspronkelijke harmonischen bewaard, terwijl de fasen verwaarloosd worden.

Het is van belang op te merken dat bij periodieke signalen de autocorrelatie zelf ook periodiek is en dus nooit uitsterft. De oorzaak hiervan is dat deze signalen door een eindig aan-

tal gegevens (zoals amplitude en frequentie) volkomen bepaald zijn en niet behoren tot de klasse van „random” signalen, waarvan in par. 2.1 is uitgegaan.

Formule (4.31) geeft de mogelijkheid om van een gegeven (of experimenteel bepaalde) periodieke autocorrelatiefunctie een reeksontwikkeling te maken en daaruit de amplituden en frequenties van de Fourier-componenten van het bijbehorende signaal te vinden.

#### 4.4. Autocorrelatie van in bandbreedte beperkte ruis.

Gegeven is een ruissignaal  $n(t)$ , waarvan het vermogensdichtheidspectrum  $\Phi_{nn}(f)$  gelijk is aan  $\sigma^2$  binnen een band ter breedte van  $2f_B$  en gelijk is aan nul buiten die band (zie fig. 4.41).

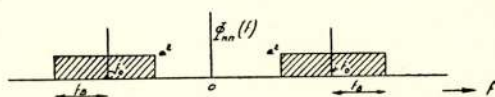


Fig. 4.41.

Dan geldt volgens (3.73):

$$\begin{aligned} \varphi_{nn}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{nn}(f) e^{+2\pi j f \tau} df = \int_{-f_0 - f_B}^{-f_0 + f_B} \sigma^2 e^{2\pi j f \tau} df \\ &+ \int_{f_0 - f_B}^{f_0 + f_B} \sigma^2 e^{2\pi j f \tau} df = \sigma^2 \frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau} \cos 2\pi f_0 \tau \end{aligned} \quad (4.41)$$

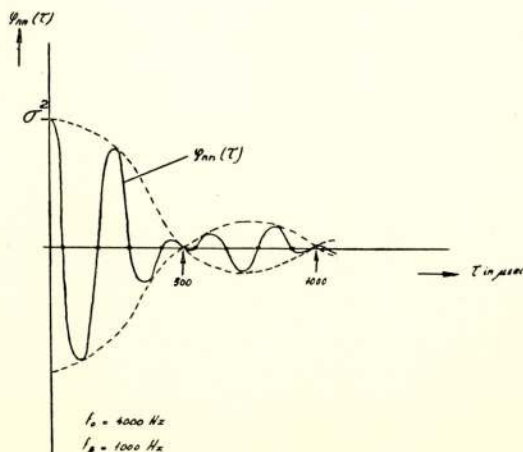


Fig. 4.42.

Hierin is  $\sigma^2 = 4f_B \alpha^2 =$  het totale vermogen van het signaal.  $\varphi_{nn}(\tau)$  bestaat a.h.w. uit een draaggolf met frequentie  $f_0$  en met als omhullende de term  $\frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau}$  (zie fig. 4.42). Omdat

$\varphi_{nn}(\tau)$  een even functie is van  $\tau$  kan het gedeelte van de figuur voor negatieve  $\tau$  door spiegeling worden gevonden.

Voor  $\tau = 0$  is de autocorrelatie maximaal ( $\varphi_{nn}(0) = \sigma^2$ ). Verder blijkt hoe voor toenemende  $\tau$  de autocorrelatie afneemt.

Bij grote bandbreedte zal de factor  $\frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau}$  sneller afnemen met  $\tau$  dan bij kleine bandbreedte en zal  $\varphi_{nn}(\tau)$  dus ook sneller uitsterven. Dit is in overeenstemming met par. 3.6.

#### 4.5. Opsporing van periodieke signalen in ruis.

Een van de belangrijkste toepassingen van autocorrelatie berust op de mogelijkheid om de aanwezigheid aan te tonen van een periodiek signaal, dat „verdronken” is in ruis van veel groter vermogen. Zelfs is het mogelijk om de frequentie en amplitude te bepalen van de Fourier-componenten van dat signaal. Deze mogelijkheid wordt gegeven door de eigenschap dat bij langdurige integratie de bijdragen van de ruis tegen elkaar wegvallen, terwijl die van het periodieke signaal elkaar versterken. In het volgend voorbeeld is als periodiek signaal een sinus gekozen.

Gegeven is als periodiek signaal  $x(t) = a \cos \omega t$ . Hiervoor is  $\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} a^2 \cos \omega \tau$  (zie 4.21) en het vermogen van  $x(t)$  is gelijk aan

$\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2} a^2$ . Het ruissignaal zij  $n(t)$  met als autocorrelatie  $\varphi_{nn}(\tau)$  en als vermogen  $\varphi_{nn}(0) = \sigma^2$ .

In het additieve mengsel  $y(t) = x(t) + n(t)$  dient nu  $x(t)$  te worden opgespoord. Daartoe wordt de autocorrelatiefunctie  $\varphi_{yy}(\tau)$  bepaald:

$$\begin{aligned} \varphi_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) y(t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) + n(t)] \cdot \\ &\quad [x(t+\tau) + n(t+\tau)] dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t+\tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t) \cdot n(t+\tau) dt \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) n(t+\tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n(t) \cdot \\
 & \cdot x(t+\tau) dt = \\
 & = \varphi_{xx}(\tau) + \varphi_{nn}(\tau) + \varphi_{xn}(\tau) + \varphi_{nx}(\tau) = \\
 & = \varphi_{xx}(\tau) + \varphi_{nn}(\tau)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

$\varphi_{xn}(\tau)$  en  $\varphi_{nx}(\tau)$  stellen voor de twee kruiscorrelatiefuncties van ruis en sinus (zie 2.107), d.w.z. zij geven de mate van lineaire correlatie tussen de ruis en het signaal. Aangezien hier geen correlatie bestaat zijn beide termen gelijk aan nul.

De autocorrelatie van de som van twee ongecorreleerde signalen is dus gelijk aan de som van de afzonderlijke autocorrelaties.

Bij kleine signaal/ruisverhoudingen is  $\varphi_{nn}(\tau)$  voor kleine waarden van  $\tau$  veel groter dan  $\varphi_{xx}(\tau)$ , maar bij toenemende  $\tau$  zal  $\varphi_{nn}(\tau)$  altijd tot nul naderen, terwijl  $\varphi_{xx}(\tau)$  blijft bestaan. Indien dus bij grote  $\tau$  de functie  $\varphi_{yy}(\tau)$  een cosinusvormig verloop aanneemt, moet er in het mengsel  $y(t)$  een sinusvormig signaal  $x(t)$  aanwezig zijn geweest. Frequentie en amplitude van  $x(t)$  kunnen dan direct worden bepaald (par. 4.2). Zie fig. 4.51.

Op deze wijze kunnen voor periodieke signalen aanzienlijke verbeteringen van de signaal/ruis-verhouding worden verkregen. Het is niet noodzakelijk dat daartoe, zoals in form. (4.51), over een oneindig lang tijdsinterval wordt geïntegreerd. Het is mogelijk dit interval te beperken. Wel neemt in dat geval de verbetering, die bereikt wordt, af met afnemende lengte van het integratie-interval.

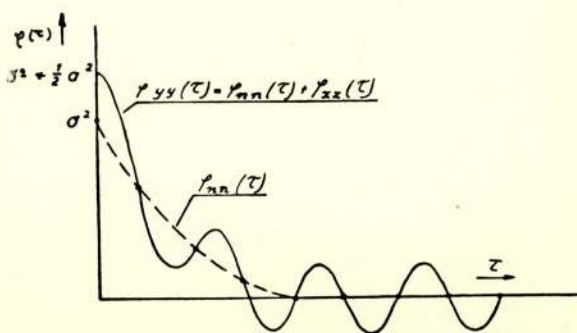


Fig. 4.51.

## 5. De kruiscorrelatiefunctie.

5.1. De kruiscorrelatiefunctie van de signalen  $x(t)$  en  $y(t)$  is gelijk aan:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \iint xy p(x, y, \tau) dx dy = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y(t + \tau) dt \quad (5.11)$$

De waarde van deze functie bij een bepaalde  $\tau$  geeft de mate van lineaire afhankelijkheid tussen de twee signalen bij een tijdsverschil  $\tau$ .

In tegenstelling tot de autocorrelatiefunctie is de kruiscorrelatiefunctie in het algemeen geen even functie van  $\tau$ .

Evenmin is het noodzakelijk dat het maximum van  $\varphi_{xy}(\tau)$  bij  $\tau = 0$  ligt. Wel geldt weer, als consequentie van par. 2.8, dat de correlatie tot nul nadert als  $\tau$  onbegrensd toeneemt.

De Fourier-transformatie van  $\varphi_{xy}(\tau)$  wordt  $\Phi_{xy}(f)$  genoemd.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \\ \varphi_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(f) e^{2\pi j f \tau} df \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Omdat  $\varphi_{xy}(\tau)$  geen even functie is van  $\tau$  zal  $\Phi_{xy}(f)$  geen reële functie van  $f$  zijn. Ten gevolge hiervan is echter  $\Phi_{xy}(f)$ , en dus ook  $\varphi_{xy}(\tau)$ , in staat om gegevens te bewaren betreffende faseverschillen van beide signalen. Dit in tegenstelling tot de autocorrelatiefunctie. Naar analogie van het autocorrelatiegeval wordt  $\Phi_{xy}(f)$  het kruisvermogensdichtheidsspectrum genoemd. Aan  $\Phi_{xy}(f)$  kan zonder meer niet direct een fysische betekenis worden toegekend. Deze wordt eerst duidelijk als het speciale geval bekend is waarop  $x(t)$  en  $y(t)$  betrekking hebben.

5.2. De kruiscorrelatiefunctie vindt in het algemeen toepassing waar vermoed wordt of bekend is dat twee signalen een onderlinge afhankelijkheid bezitten. Een voorbeeld is het volgende:

Gegeven is een lineair netwerk met een impulsresponsie  $h(t)$  en een overdrachtsfunctie  $H(f)$ . Zoals bekend zijn  $H(f)$  en  $h(t)$  elkaars Fourier-transformaties.

Als inputsignaal  $x(t)$  van dit netwerk wordt genomen een denkbeeldig ruissignaal, dat een recht en onbegrensd vermogensdichtheidsspectrum bezit.

Dus:  $\Phi_{xx}(f) = a^2$ .

Afgezien van een constante geldt dan voor de autocorrelatiefunctie van  $x(t)$ :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \delta(\tau) \quad (5.22)$$

Hierin is  $\delta(\tau)$  de impulsfunctie van Dirac. Formule (5.22) volgt direct uit een Fourier-transformatie van  $\Phi_{xx}(f)$ .

Het outputsignaal van het netwerk zij  $y(t)$ . Het spectrum  $\Phi_{yy}(f)$  van  $y(t)$  is dan gelijk aan:

$$\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \quad (5.23)$$

Met behulp van een Fourier-transformatie wordt hieruit de autocorrelatiefunctie  $\varphi_{yy}(\tau)$  bepaald.

$\Phi_{yy}(f)$  en  $\varphi_{yy}(\tau)$  geven uitsluitend inlichtingen omtrent de vermogensoverdracht van het netwerk, en zeggen niets over de fasekarakteristiek. Zij zijn dus slechts gedeeltelijk bepalend voor  $H(f)$  en  $h(t)$ .

Van groot belang is nu de kruiscorrelatie tussen ingangssignaal en uitgangssignaal. Hiervoor kan worden aangetoond dat

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) \quad (5.24)$$

Voor het kruisvermogenspectrum geldt dus:

$$\Phi_{xy}(f) = H(f) \quad (5.25)$$

$\Phi_{xy}(f)$  en  $\varphi_{xy}(\tau)$  blijken dus wel volkomen bepalend te zijn voor het netwerk. Door middel van meting van de kruiscorrelatiefunctie kan dus de impulsresponsie c.q. overdrachtsfunctie, en daarmee alle eigenschappen van het netwerk, worden bepaald.

Ook wanneer de „random input” van het systeem geen ruis is met een onbeperkt recht spectrum, kan de overdrachtsfunctie, zij het met iets ingewikkelder formules, op deze wijze worden gevonden.

Deze methode is vooral van belang voor het onderzoek van die systemen, waar men het ingangssignaal niet in de hand



heeft en dus niet op de normale wijze dempings- en fasemetingen kan verrichten. Dikwijls is op dergelijke systemen als input reeks een „random” signaal aanwezig, bijv. atmosferische storingen, Brown'se beweging, schommelingen van de omgevings-temperatuur, enz. Van deze signalen kan dan gebruik worden gemaakt om m.b.v. kruiscorrelatie de overdracht van het systeem te bepalen.

## 6. De elektronische analoge correlator.

6.1. De par. 6 en 7 bevatten de beschrijving van een analoge elektronische rekenmachine, die in staat is zowel autocorrelatie- als kruiscorrelatiefuncties te berekenen. De te correleren signalen  $x(t)$  en  $y(t)$  worden aan het apparaat toegevoerd in de vorm van elektrische spanningsvariaties. De correlatiefuncties worden berekend als tijdgemiddelde, dus volgens de formule:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \overline{x(t) \cdot y(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (6.11)$$

Indien een autocorrelatiefunctie wordt berekend is in (6.11)

$$y(t) = x(t)$$

6.2. De drie bewerkingen, nodig voor het berekenen van  $\varphi_{xy}(\tau)$  bij één bepaalde waarde van  $\tau$  zijn:

1. Vertragen van  $x(t + \tau)$  t.o.v.  $y(t + \tau)$ , zodat het signaal  $x(t)$  ontstaat.
2. Vermenigvuldigen van  $x(t)$  en  $y(t + \tau)$ , zodat het signaal  $x(t) \cdot y(t + \tau)$  ontstaat.
3. Integratie van het signaal  $x(t) \cdot y(t + \tau)$ .

Vooral de bewerkingen 1 en 2 leveren bij brede frequentiebanden grote moeilijkheden op.

6.3. In de te beschrijven correlator zijn deze moeilijkheden op de volgende wijze vermeden (zie fig. 6.31).

Op regelmatige tijdstippen  $t_1, t_2 \dots t/m \ t_N$  worden amplitudebemonsteringen  $a_1, a_2 \dots t/m \ a_N$  gemaakt van het signaal  $x(t)$ . Van het signaal  $y(t)$  worden eveneens amplitudebemonsteringen gemaakt:  $b_1, b_2 \dots t/m \ b_N$ , doch nu op de tijdstippen  $(t_i + \tau)$ ,

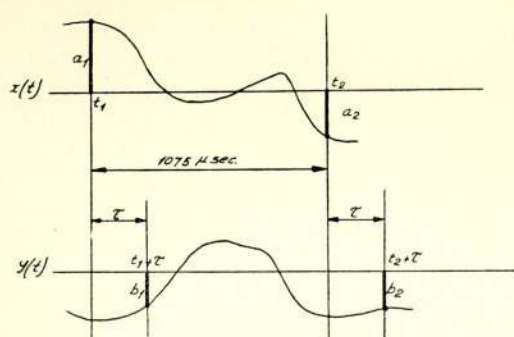


Fig. 6.31.

$(t_2 + \tau) \dots t/m, (t_N + \tau)$ . Vervolgens worden de bij elkaar behorende bemonsteringen  $a_1$  en  $b_1, a_2$  en  $b_2 \dots t/m a_N$  en  $b_N$  met elkaar vermenigvuldigd, zodat de reeks van producten  $a_1 b_1, a_2 b_2 \dots t/m a_N b_N$  ontstaat. Deze producten worden gesommeerd en de som dient

nog door  $N$  te worden gedeeld. Zo ontstaat de vorm  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_n b_n$ .

Voor alle gevallen dat met de correlator een correlatiefunctie wordt berekend is  $N$  even groot, nl. 10.000. De deling door  $N$  kan dus achterwege blijven, temeer daar ons niet de absolute waarde van  $\varphi_{xy}(\tau)$  interesseert, doch slechts het verloop als functie van  $\tau$ . Er wordt dus volstaan met een berekening van de vorm

$$\sum_{i=1}^{10^4} a_n b_n.$$

De middeling wordt hier verkregen door sommatie van een eindig aantal discrete producten en niet door continue integratie. Teneinde de hieruit voortvloeiende fout gering te houden dient dit aantal producten groot (i.c. 10.000) te zijn, en zich over een redelijk lang tijdsinterval uit te strekken.

De vertragingstijd  $\tau$  is niet continu instelbaar, doch in stappen. Dit heeft als voordeel dat de waarde van  $\tau$  zeer goed constant kan worden gehouden. Het gevolg is echter tevens dat de waarde van  $\varphi_{xy}(\tau)$  slechts op een beperkt aantal punten van de  $\tau$ -as kan worden bepaald. Voor tussenliggende waarden van  $\tau$  moet  $\varphi_{xy}(\tau)$  door interpolatie worden gevonden. Ter beschikking staan 39 stappen van  $21,5 \mu \text{ sec}$ , te beginnen bij  $\tau = 0$ . De maximale vertragingstijd bedraagt dus  $39 \times 21,5 = 840 \mu \text{ sec}$ .

De onderlinge afstand tussen twee bemonsteringen van het signaal  $x(t)$  of  $y(t)$  bedraagt  $1075 \mu \text{ sec}$ . De berekening van één punt van de correlatiecurve, die de somming van 10.000 producten omvat, neemt dus  $10.000 \times 1075 \mu \text{ sec} \approx 11 \text{ sec}$  in beslag.

6.4. Ten opzichte van par. 6.2 biedt de in par. 6.3 aangegeven werkwijze diverse voordelen:

1. Het vertragen van het signaal  $x(t + \tau)$  is vervallen. In plaats hiervan is het bemonsteren van het signaal  $y(t)$  getreden, op een tijdstip, dat  $\tau$  sec later valt dan het tijdstip, waarop  $x(t)$  wordt bemonsterd.
2. Het vermenigvuldigen van twee continue signalen is eveneens vervallen en is vervangen door het telkens vermenigvuldigen van twee bij elkaar behorende bemonsteringen.
3. Bovendien is nu de mogelijkheid ontstaan om bij het merendeel van de bewerkingen gebruik te maken van bestaande principes uit de impulstechniek.

## 7. De verschillende onderdelen.

7.1. In de figuren 7.11 en 7.12 zijn het blokschema en het pulsschema van de correlator afgebeeld.

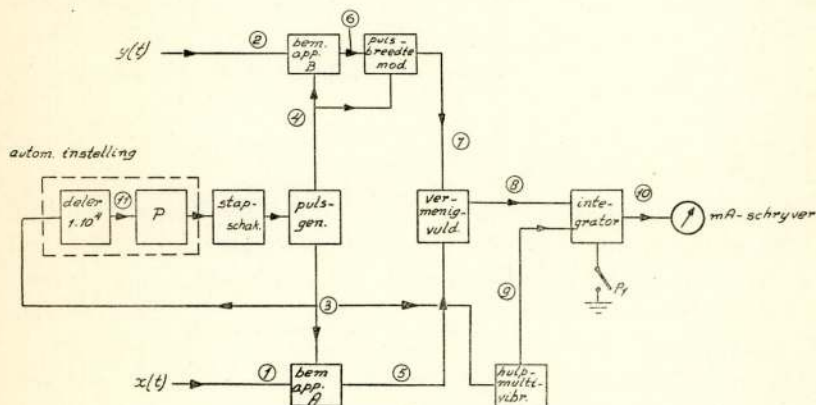


Fig. 7.11.

## 7.2. De pulsgenerator.

De pulsgenerator geeft elke  $1075 \mu \text{ sec}$  op punt 3 een  $A$ -puls af, die na  $\tau$  sec wordt gevolgd door een  $B$ -puls op punt 4.

Gedurende de berekening van één punt van de correlatiecurve is  $\tau$  constant. Teneinde  $\varphi_{xy}(\tau)$  te kunnen vinden voor meer waarden van  $\tau$  is de afstand tussen  $A$ - en  $B$ -puls, dus  $\tau$ , regelbaar in 39 stappen van  $21,5 \mu \text{ sec}$ . De waarde van  $\tau$  wordt bepaald door een stuurspanning, die wordt ingesteld m.b.v. de stap-schakelaar.

Teneinde  $\tau$  over het genoemde gebied met grote precisie re-



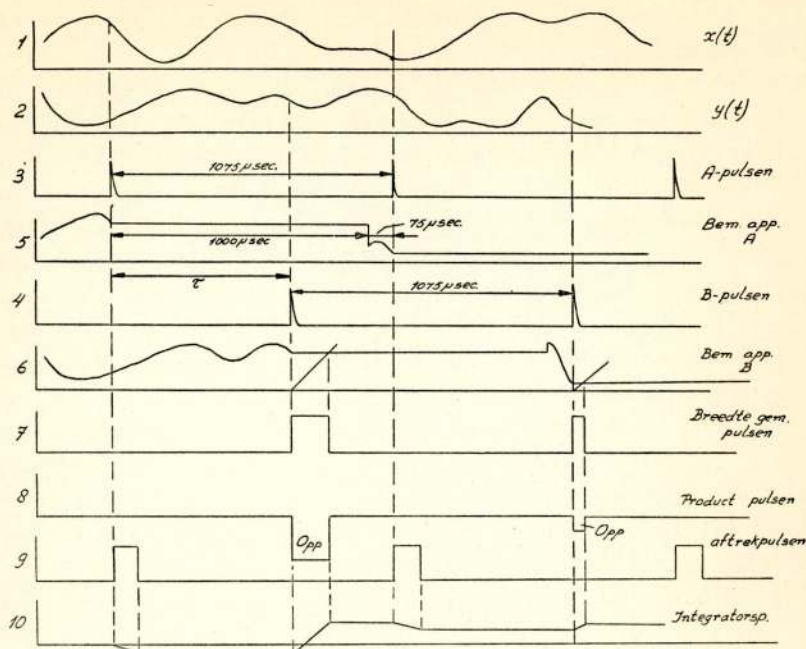


Fig. 7.12.

gelbaar te maken, is gebruik gemaakt van een tamelijk gecompliceerde schakeling, die bestaat uit enkele multivibrators, deeltrappen, poortschakelingen en een fantastronvertragscircuit. In principe worden de *A*- en *B*-puls door poorten geselecteerd uit een serie van pulsen met onderlinge afstand van  $21,5 \mu\text{sec}$ . (zie fig. 7.21).

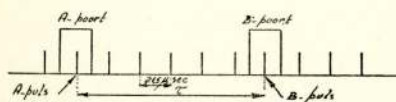


Fig. 7.21.

De plaats van de *B*-poort is t.o.v. die van de *A*-poort verschuifbaar. Zodoende is de afstand tussen *A*- en *B*-puls in stappen regelbaar.

### 7.3. De bemonsteringsapparaten *A* en *B*.

De bemonsteringsapparaten verenigen in zich twee belangrijke functies:

1. Op het moment dat een triggerpuls wordt toegevoerd maken zij een bemonstering van de signaalamplitude.
2. Gedurende  $1000 \mu\text{sec}$  fungeren zij als geheugenorgaan voor de aldus verkregen informatie.

De *A*- en *B*-pulsen worden als triggerpulsen toegevoerd aan

resp. de bemonsteringsapparaten  $A$  en  $B$ , die, wat betreft hun constructie, identiek zijn. Zij bevatten in principe een condensator  $C_g$ , de z.g. geheugencondensator, die aan één zijde aan aarde ligt en aan de andere zijde via een gesloten schakelaar  $S$  is doorverbonden met de signaalspanning (zie fig. 7.31).

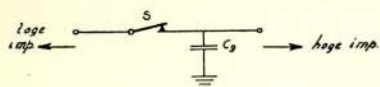


Fig. 7.31.

Bij het verschijnen van een triggerpuls wordt  $S$  voor een tijdsduur van  $1000 \mu\text{sec}$  geopend. Gedurende dit interval blijft dan de waarde, die de signaalspan-

ning op het moment van openen had, als gelijkspanning op  $C_g$  bewaard.

Op de punten 5 en 6 verschijnen dus stukken gelijkspanning met een duur van  $1000 \mu\text{sec}$ , afgewisseld door stukken signaal met een duur van  $75 \mu\text{sec}$ . (Immers, elke  $1075 \mu\text{sec}$  verschijnt er een  $A$ - en een  $B$ -puls). Van de stukken gelijkspanning is de hoogte gemoduleerd met hetingangssignaal  $x(t)$  resp.  $y(t)$ . De bemonsteringsapparaten zijn bruikbaar voor signaalfrequenties tussen  $100 \text{ Hz}$  en  $200 \text{ kHz}$ .

De schakelaar  $S$  is uitgevoerd in de vorm van een electro-nische schakeling (zie fig. 7.32).

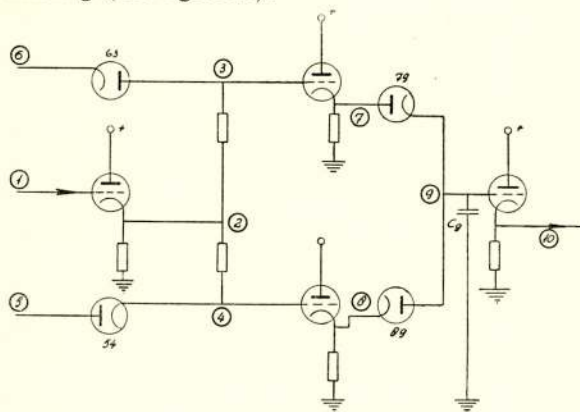


Fig. 7.32.

Het signaal ( $x(t)$  of  $y(t)$ ) op punt 1 wordt via een kathodevolger en twee weerstanden toegevoerd aan de punten 3 en 4. De dioden 63 en 54 zijn ongeleidend. Op de punten 7 en 8 wordt dus het signaal teruggevonden. De geheugencondensator  $C_g$  volgt de signaalvariëaties, die via een kathodevolger naar punt 10, de uitgang, worden gebracht. Op het moment dat er nu een  $A$ - of  $B$ -puls verschijnt worden op de punten 5 en 6

snelle positieve, resp. negatieve, spanningssprongen teweeg gebracht. De dioden 79 en 89 gaan nu over in de ongeleidende toestand en  $C_g$  kan noch opladen, noch ontladen. Na  $1000 \mu\text{sec}$  worden de spanningssprongen op de punten 5 en 6 weer teniet gedaan en herstelt zich de oude toestand.

#### 7.4. De pulsbreedtemodulator.

Het signaal uit het bemonsteringsapparaat  $B$  wordt gebruikt als stuurspanning voor een pulsbreedtemodulator, die gestart

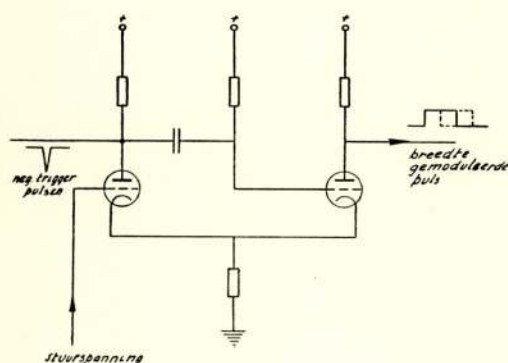


Fig. 7.41.

wordt door de  $B$ -puls. Deze modulator geeft dan één positieve impuls af, waarvan de breedte lineairafhangt van de stuurspanning (zie punt 7 van fig. 7.11 en 7.12). Als modulator is gekozen een monostabiele multivibrator, die gestuurd wordt op het rooster (fig. 7.41).

#### 7.5. De vermenigvuldiger.

In de vermenigvuldiger bevindt zich een poortschakeling, die geopend wordt door de breedte-gemoduleerde pulsen van punt 7, zodat dan de hoogte-gemoduleerde gelijkspanningsstukken van punt 5 worden doorgelaten. Zo ontstaan op punt 8 (negatieve) pulsen, die zowel in hoogte als in breedte gemoduleerd zijn. Deze pulsen worden productpuls genoemd. Het oppervlak  $O_{pp}$  van de productpuls is een lineaire maat voor het product van de ingangssignalen.

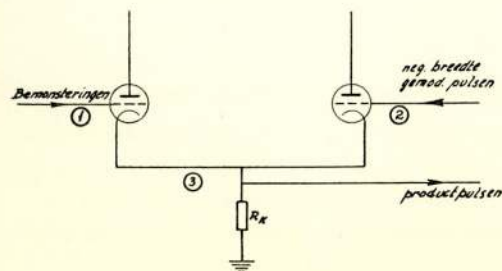


Fig. 7.51.

Het essentiële gedeelte van de vermenigvuldiger, de poortschakeling, is in fig. 7.51 weergegeven. Het bestaat slechts uit twee kathodevolgers met gemeenschappelijke kathodeweer-



stand  $R_k$ . De kathodespanning is altijd gelijk aan de hoogste van de beide roosterspanningen. Normaliter is dat de spanning op punt 2. Op dit punt verschijnt echter elke  $1075 \mu \text{ sec}$  een negatieve versie van de breedte-gemoduleerde impuls. Gedurende deze puls zakt de spanning op punt 2 zo ver dat de kathode de spanning van punt 1 aanneemt. De spanningsval op punt 3, de kathode, wordt dan dus bepaald door de spanning op punt 1. Zo ontstaan op punt 3 de productpulsen.

#### 7.6. *De aftrekpulsen.*

In de loop van de verschillende bewerkingen wordt de aard van de informatie meermalen veranderd (hoogtemodulatie, breedtemodulatie, oppervlakmodulatie). Omdat het onmogelijk is om met bijv. een negatieve pulsbreedte te werken, worden reeds direct na de ingangen van de bemonsteringsapparaten twee gelijkspanningen  $c_x$  en  $c_y$  aan de signalen toegevoegd, zodanig groot dat de informatiedragende grootheden altijd positief blijven. Het gevolg hiervan is echter dat het oppervlak  $O_{pp}$  van de productpulsen een constante bijdrage bevat, die overeenkomt met het product  $c_x c_y$ . Ten gevolge hiervan zou het integratieresultaat van 10.000 productpulsen (zie par. 7.7) uit twee gedeelten bestaan, nl. een modulatieterm, die de gezochte waarde van  $\varphi_{xy}(\tau)$  voorstelt, en een constante term, afkomstig van de toegevoegde gelijkspanningen  $c_x$  en  $c_y$ . Teneinde deze ongewenste constante term te verwijderen wordt, behalve de productpulsen, aan de integrator nog een tweede signaal toegevoerd, dat bestaat uit een serie constante impulsen van zodanige grootte en polariteit dat zij de bijdrage van  $c_x c_y$  opheffen. Deze pulsen zijn de zg. aftrekpulsen. Zij worden opgewekt door de hulpmultivibrator (zie punt 9 van het blokschema), die getriggerd wordt door de  $A$ -pulsen.

#### 7.7. *De integrator.*

De productpulsen worden tezamen met de aftrekpulsen toegevoerd aan een Miller-integrator met een tijdconstante van 160 sec. Deze waarde wordt bepaald door de tijdsduur gedurende welke de integrator lineair moet werken. Zoals in par. 6.3 is aangegeven duurt de berekening van één punt van de correlatiecurve 11 sec. Deze tijd is t.o.v. 160 sec voldoende kort. Teneinde voor signalen van groot zowel als van gering ver-

mogen een spanningsexcursie aan de uitgang van de integrator te kunnen verkrijgen, waarmee de registrerende meter (par.7.8) volledig kan worden uitgestuurd, is de gelijkspanningsversterking in de integrator instelbaar op de waarden 250, 500 en 700.

Het circuit van de integrator is in principe in fig.7.71 weergegeven.

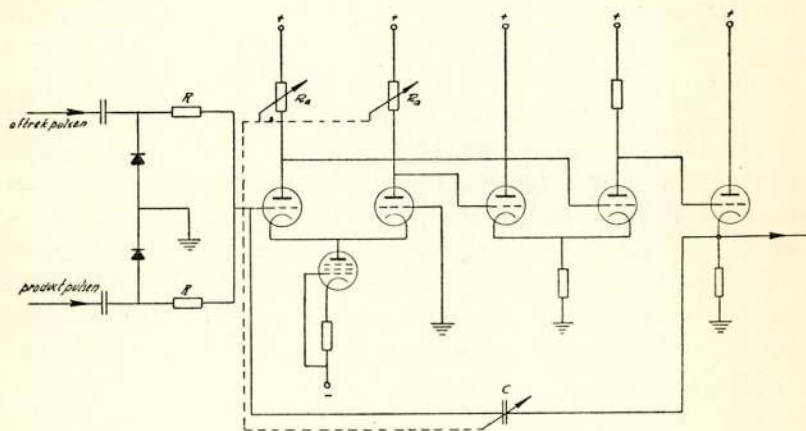


Fig. 7.71.

De gelijkspanningsversterker bestaat uit twee differentiaal-versterkertrappen, afgesloten door een kathodevolger. De versterking is regelbaar gemaakt door de anodeweerstanden  $R_a$  van de eerste trap te variëren. Teneinde de tijdconstante van de integrator bij iedere waarde van de versterking gelijk aan 160 sec te houden, moet tevens de tegenkoppelcapaciteit  $C$  worden gevarieerd.

### 7.8. Het afleesinstrument.

De uitgangsspanning van de integrator, die op punt 10 verschijnt, wordt geregistreerd met een schrijvende milliamperemeter. Concrete voorbeelden van deze registratiemethode worden in par. 8 gevonden.

### 7.9. De automatische instelling.

Als voor bijv.  $\tau = 0$  de waarde is bepaald van  $\varphi_{xy}(\tau)$ , dient de integrator te worden ontladen en moet de pulsgenerator worden ingesteld op de volgende waarde van  $\tau$ , dus op  $\tau = 21,5 \mu \text{ sec}$ . Deze handelingen worden automatisch verricht:

Nadat 10.000 pulsen zijn gepasseerd op punt 3 geeft de deler  $1:10^4$  een puls af op punt 11. Deze impuls start een schakeling, die:

- 1e. de integrator gelegenheid geeft tot ontladen door een relaiscontact  $P_1$  te sluiten;
- 2e. de stapshakelaar, die  $\tau$  bepaalt, één stap laat doordraaien.

Als er op punt 3 weer 10.000 pulsen zijn gepasseerd geeft de deler nogmaals een puls af op punt 11. Hierdoor wordt  $P_1$  weer geopend en de berekening van het volgende punt van de correlatiecurve neemt een aanvang. (De stapshakelaar blijft bij deze tweede puls onbevestigd).

Er worden dus gedurende 11 sec 10.000 productpulsjes geïntegreerd. Dan volgt 11 sec rust, benut voor ontlading van de integrator en instelling op de volgende waarde van  $\tau$ . Daarna wordt weer gedurende 11 sec geïntegreerd, enz. Voor het opnemen van een gehele correlatiecurve, die uit 39 punten bestaat, is dus een tijdsduur vereist van  $39 \times 2 \times 11 = 860 \text{ sec} \approx 15 \text{ minuten}$ .

## 8. Experimentele resultaten.

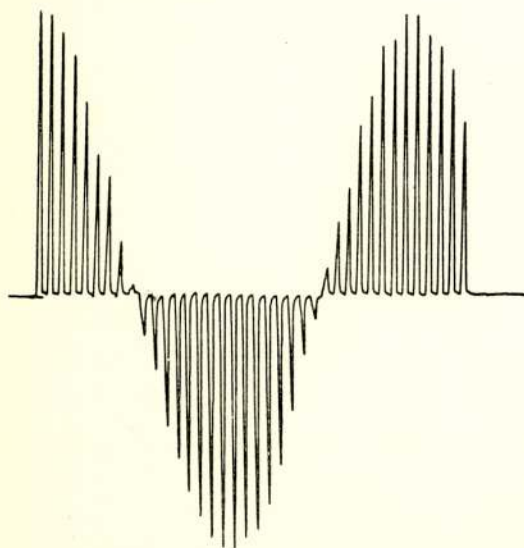


Fig. 8.11.

Autocorrelatie van een sinusvormige spanning van 1550 Hz.

8.0. In deze paragraaf wordt een aantal voorbeelden gegeven van correlatiefuncties, zoals die met de electr. anal.correlator worden bepaald.

### 8.1. Periodieke signalen.

Fig. 8.11 geeft de autocorrelatie van een sinusvormig signaal. Zoals in par. 4.2 reeds is aangegeven is de autocorrelatiefunctie een cosinus. Fig. 8.12 stelt de autocorrelatiefunctie voor van



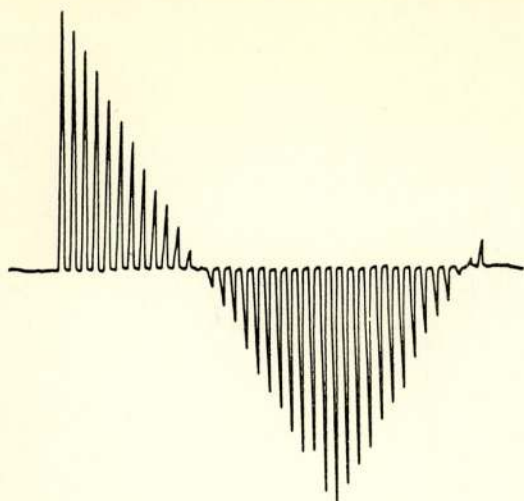


Fig. 8.12.

Autocorrelatie van een symmetrische  
blokspanning van 1000 Hz.

een blokspanning. Zoals op eenvoudige wijze is in te zien is dit een driehoekskromme.

### 8.2, 3. „Random”-signalen.

De figuren 8.21, 8.22 en 8.23 geven de autocorrelatiefuncties van een ruissignaal waarvan het spectrum bepaald wordt door een filter, dat bestaat uit een parallelschakeling van  $L$ ,  $R$  en  $C$ . Het kan worden aange-

toond dat de autocorrelatie dan een cosinus is, die overeenkomt met de middenfrequentie van het filter en met als omhullende een negatieve  $e$ -macht waarvan de tijdconstante door de bandbreedte wordt bepaald. Uit de figuren blijkt duidelijk hoe bij toenemende bandbreedte de correlatie sneller tot nul nadert. Dit is in overeenstemming met par. 3.6, terwijl in par. 4.4 bij een rechthoekig spectrum ook iets dergelijks werd gevonden.

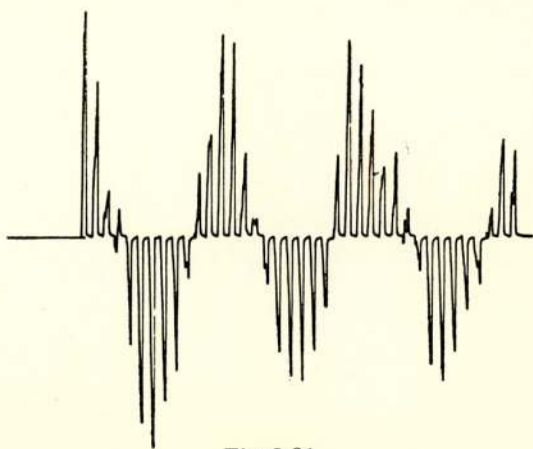


Fig. 8.21.

Autocorrelatiefunctie van ruis,  
middenfrequentie 4000 Hz, bandbreedte 150 Hz.

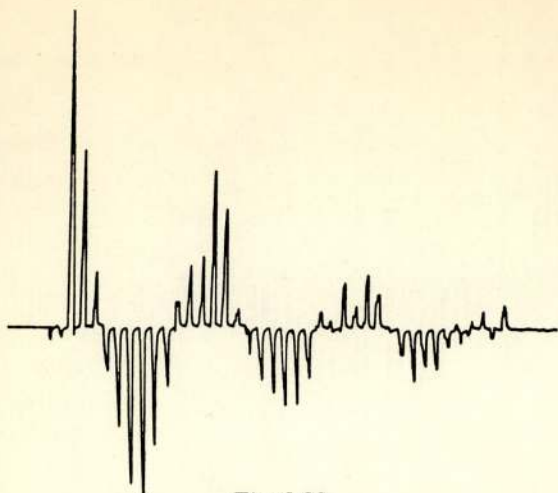


Fig. 8.22.

Autocorrelatiefunctie van ruis,  
middenfrequentie 4000 Hz, bandbreedte 750 Hz.

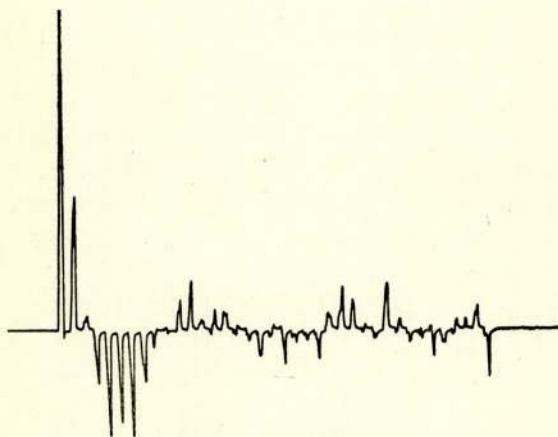


Fig. 8.23.

Autocorrelatiefunctie van ruis,  
middenfrequentie 4000 Hz, bandbreedte 1200 Hz.

In de fig. 8.31 en 8.32 is de autocorrelatiefunctie van „clipped” ruis afgebeeld, resp. voor kleine en grote bandbreedte. Ook hier is de invloed van de bandbreedte op de snelheid van uitsterven van de correlatie duidelijk. Als  $\varphi(\tau)$  de correlatiefunctie is van een onvervormd, Gaussisch ruissignaal, dan is de autocorrelatie van diezelfde „clipped” ruis gelijk aan:

$$\varphi'(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin \varphi(\tau)$$

Deze formule verklaart waarom, afgezien van de omgeving van  $\tau = 0$ , de autocorrelatie van een „clipped” ruissignaal slechts zo weinig verschilt van die van een onvervormd signaal.

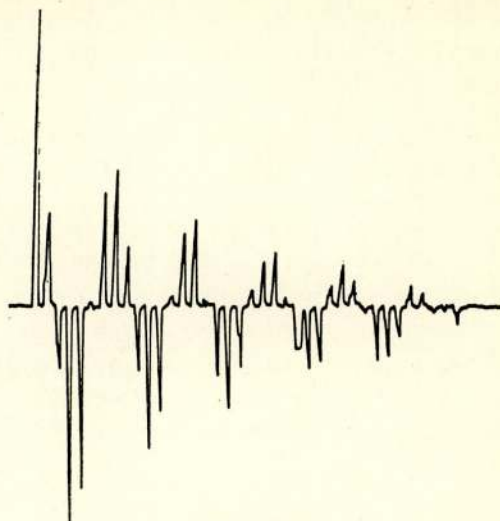


Fig. 8.31.  
Autocorrelatie van „clipped” ruis.  
middenfrequentie 8000 Hz  
bandbreedte 250 Hz.

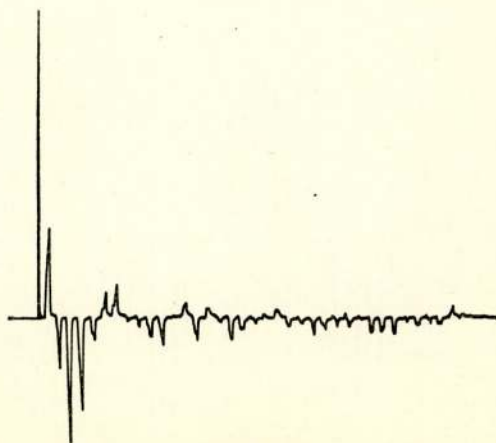


Fig. 8.32.  
Autocorrelatie van „clipped” ruis.  
middenfrequentie 8000 Hz,  
bandbreedte 1200 Hz.



#### 8.4. Opsporing van periodieke signalen.

De fig. 8.41, 8.42 en 8.43 hebben betrekking op verbetering van de signaal-ruisverhouding voor periodieke signalen, zoals besproken in par. 4.5. Als periodiek signaal is een sinusvormige spanning van 3000 Hz gekozen, terwijl de storende ruis een zeer breed, constant spectrum heeft. De bijdrage van de ruis tot de figuur is dus tamelijk snel uitgestorven en komt alleen tot uiting in de hoge piek bij  $\tau = 0$ . Daarna neemt de fig. al spoedig een cosinusvormig verloop aan.

De signaal-ruisverhoudingen  $\frac{S}{N}$  van het mengsel op de ingang van de correlator bedragen resp. -3, -6 en -8,5 dB. Ten gevolge van de niet-ideale integratie (sommatie van slechts 10.000 producten) en van instabiliteit in de correlator blijft er nog een zekere rest-ruis over in het correlogram, die de oorzaak is van het niet zuiver cosinusvormige verloop bij grote  $\tau$ .

Niettemin is het duidelijk dat een aanzienlijke verbetering van de signaal-ruisverhouding is bereikt.

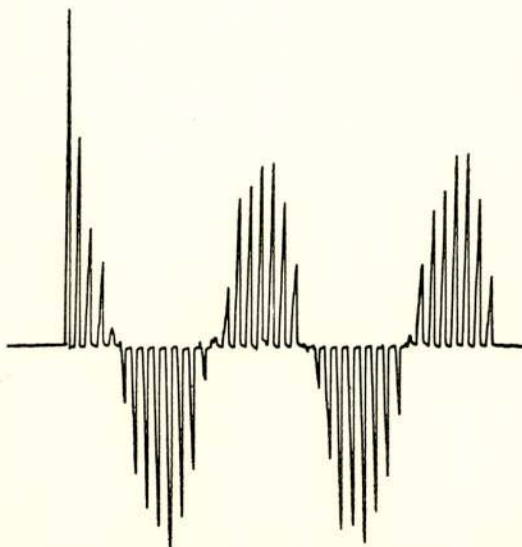


Fig. 8.41.

Correlogram van een mengsel van sinus en ruis.

$$\frac{S}{N} = -3 \text{ dB}$$

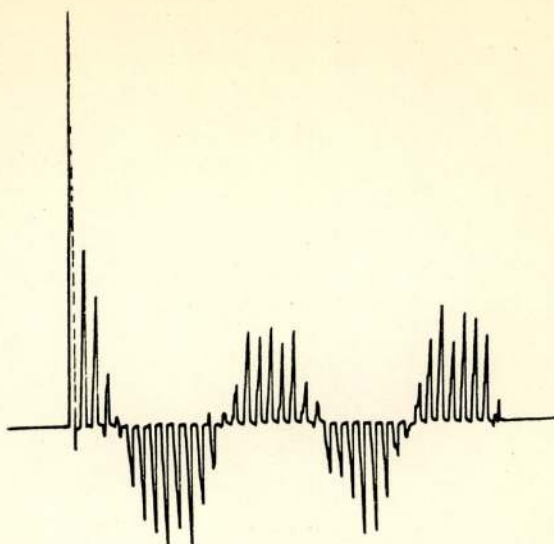


Fig. 8.42.

Correlogram van een mengsel van sinus en ruis.

$$\frac{S}{N} = -6 \text{ dB}$$

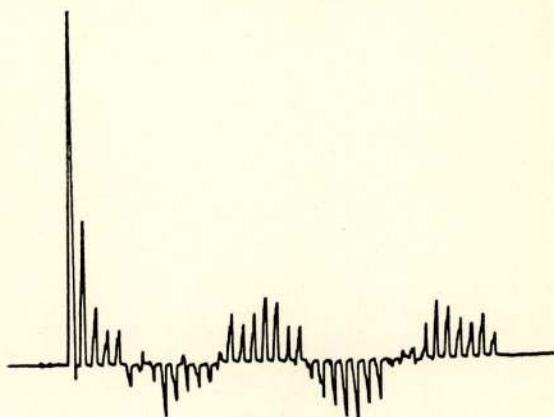


Fig. 8.43.

Correlogram van een mengsel van sinus en ruis.

$$\frac{S}{N} = -8,5 \text{ dB}$$





## Strategische spelen

door J. J. Meinardi \*)

Voordracht gehouden voor het Nederlands Radiogenootschap en de Sectie Telecommunicatietechniek van het K.I.v.I. op 16 oktober 1956.

### Samenvatting

In dit artikel wordt een schets gegeven van de theorie van de strategische spelen.

Verschillende klassen van spelen worden achtereenvolgens aan de hand van voorbeelden toegelicht; mathematische afleidingen zijn hierbij vermeden. Verder wordt ruimschoots aandacht gewijd aan het mini-max principe, waarop de oplossing van de twee-personen spelen berust, en aan de vorming van coalities.

Tot besluit worden de toepassingsmogelijkheden van de theorie aangegeleid.

### Summary

This paper gives a short introduction to the theory of games, with examples taken from several classes of games.

Much attention is paid (avoiding abstract mathematics however) to the mini-max principle which is basic to the solution of 2 person-zero sum games. The formation of coalitions in n-person games is also discussed.

Finally, it is pointed out to which fields game theory may be applied or has been applied already, while references are added.

### 1. Inleiding.

Het begrip strategie heeft een uitgesproken militaire klank. In die zin wordt strategie gedefinieerd als „de methode om de vijand tot strijd te dwingen onder zo gunstig mogelijke omstandigheden voor de eigen legers”. Een moderne definitie van strategie dient zich echter niet te beperken tot de krijgskundige zijde, maar moet ook de politieke, industriële en economische betekenis van een land of bondgenootschap omvatten. Hoe dan ook de definitie moge luiden, het is de verdienste van J. v. Neumann's speltheorie dat ons inzicht in dit begrip „strategie” verhelderd is en dat wij door strenge mathematische analyse in vele gevallen uit verschillende mogelijke strategieën de juiste weten te kiezen.

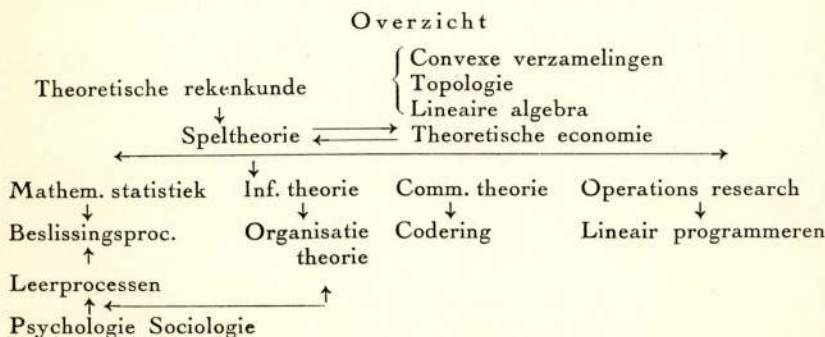
\*) Fysisch Laboratorium R.V.O.-T.N.O.

John v. Neumann heeft zijn theorie ontwikkeld met de bedoeling een mathematische basis te leggen voor de economie. Daartoe heeft hij als model het strategisch spel ingevoerd. Dit vertoont in de acties van de tegenstanders een opvallende analogie met allerlei dagelijkse economische problemen. Door de bestudering van het experimenteel model enerzijds en het mathematisch model anderzijds bestond al sedert lang een vruchtbare wisselwerking tussen b.v. de natuurkunde en de wiskunde. Aan een experimenteel model kunnen fysische grootheden gemeten worden, het mathematisch model bevat een aantal stellingen of postulaten, die door mathematische afleiding tot een conclusie voeren, die weer in de werkelijkheid geïnterpreteerd dient te worden.

De economie had zich, behoudens enige toepassing van de mechanica, nog niet eerder van de exacte wetenschap bediend. Tevergeefs zocht men naar empirische wetten; tevergeefs, omdat het aantal parameters zo enorm groot is.

Von Neumann betoogde dat hier het verkeerde gereedschap gebruikt werd en baseerde zijn werk onder meer op de verzamelingenleer, de topologie en de lineaire algebra.

De „Theory of Games and Economic Behavior” van v. Neumann en Morgenstern heeft de stoot gegeven tot een belangrijke mathematische ontwikkeling, niet alleen op economisch gebied, maar ook op het terrein van de sociologie, de informatie- en communicatietheorie en vooral in de „operations research”. De toepassing op de mathematische statistiek leidde tot de geboorte van de statistische beslissingsfuncties.



## 2. Strategische spelen

Een gezelschapsspel noemen wij „strategisch” als de spelers



al hun vernuft en inzicht moeten inzetten om een partij van hun tegenstanders te kunnen winnen.

Poker, bridge, schaak, trik-trak, soeten of morra zijn voorbeelden van strategische spelen. Patience en roulette daarentegen zijn geen strategische spelen, al worden zij wel eens mathematische spelen genoemd, omdat wij daar geen andere tegen-speler hebben dan de „natuur” (in dit geval de kanswetten) en ons doel uitsluitend gericht is op het verkrijgen van een zo groot mogelijke winst aan punten of guldens. Als economisch analoon is een dergelijk spel alleen geschikt voor een monopolistische (bijv. een communistische of dictatoriale) maatschappij.

Bij een spel behoren spelregels, die omschrijven wat het doel van het spel is, hoe het gespeeld dient te worden en wat elk van de spelers toekomt na afloop van een partij.

Wij gaan ervan uit dat een speler graag wil winnen, d.w.z. dat het verkrijgen van winstpunten waarde voor hem heeft. Zijn acties zijn gericht op het verkrijgen van een zo groot mogelijke winst, deze worden echter doorkruist door de acties van zijn tegenspelers en hij zal dus met een optimale winst genoegen moeten nemen.

De theorie van de strategische spelen wil een antwoord geven op de vraag op welke wijze de speler van de spelregels gebruik dient te maken om tenminste een optimale winst te verkrijgen en hoe groot die winst dan wel is. Dat antwoord moet in mathematisch volledige vorm opgeschreven kunnen worden, wij zullen dit de „oplossing” van het spel noemen.

In het volgende zullen wij de oplossingen zoeken van verschillende klassen van strategische spelen. Deze worden onderscheiden naar het aantal deelnemende spelers en naar de omstandigheid of de som der winsten en verliezen al dan niet gelijk aan nul is.

Hoewel in wezen de definitie van een „oplossing” voor alle spelen gelijk is, zal het blijken dat wij een onderscheid moeten maken tussen de oplossing van een spel voor twee personen of een voor meer dan twee personen.

### 3. Twee spelers, de som van hun winst is nul.

Dit is de eenvoudigste klasse: al wat de ene speler ( $P$ ) wint of verliest ( $v(P)$ ) gaat ten koste van of komt ten goede aan de andere speler ( $Q$ ):  $v(Q)$ .

$$v(P) + v(Q) = 0, \text{ of algemeen } \sum v(i) = 0$$



Wij beginnen met spelen, die uit slechts twee zetten bestaan; elk van beide spelers mag één zet doen.

De keuze, die door een speler gedaan wordt uit de verzameling van zetten, die voor hem mogelijk zijn, noemen wij voortaan de keuze van een „strategie”. Wij gaan nu de „oplossing” van een demonstratiespel zoeken. Dit spel kunnen wij „hé-hou-vast” noemen, de spelregels schrijven voor dat de zettenverzamelingen van  $P$  en  $Q$  bestaan uit het uitroepen van hé, hou, of vast.

Als  $P$  roept: hé en  $Q$  roept: hé, dan verliest  $P$  3 cent aan  $Q$ ; als  $P$  roept: hou en  $Q$  roept: hé, dan krijgt  $P$  4 cent van  $Q$ , enz. voor alle negen combinaties.

We schrijven de „spelregels” in matrixvorm op:

Voor  $P$ :

		Q roept:		
		hé	hou	vast
P roept:	hé	- 3	- 2	3
	hou	4	0	1
	vast	2	- 1	- 4

Voor  $Q$ :

		Q roept:		
		hé	hou	vast
P roept:	hé	3	2	- 3
	hou	- 4	0	- 1
	vast	- 2	1	4

De linkertabel geeft de winst van  $P$ ,  $v(P)$ , voor de negen combinaties, de rechtertabel geeft  $v(Q)$ .

Omdat  $v(P) = -v(Q)$  is het in het vervolg niet nodig voor  $Q$  een aparte tabel op te schrijven. Zodra wij echter met spelen te maken krijgen, waar  $v(P) + v(Q) \neq 0$ , waarbij dus waardevormen verbruikt ( $\Sigma v < 0$ ) of voortgebracht ( $\Sigma v > 0$ ) worden, moeten wij wel de beide tabellen opschrijven.

$P$  begint het spel. Hij beziet de tabel en het valt hem op dat hij de grootste winst (4) kan maken als hij „hou” roept. Voor  $Q$  blijft nu nog een keuze over uit 4, 0 of 1. Hij kiest dus „hou”. De door  $P$  begeerde winst van 4 wordt hierdoor tot 0 gereduceerd.

Nu begint  $Q$ . Ook hij zou graag 4 winnen en kiest „vast”. Voor  $P$  blijft de keuze over uit 3, 1 en - 4. Hij kiest dus „hé” en brengt daarmee aan  $Q$  een verlies van 3 cent toe (in plaats van 4 cent winst). Hieruit leren wij dat het voordeel biedt om als laatste aan slag te zijn; dat voordeel bestaat uit de informatie omtrent de strategie van de tegenstander.

Wij beweren dat  $P$  en  $Q$  niet *rationeel* hebben gespeeld. Een rationeel speler kiest zijn strategie zodanig dat het voor de tegenstander geen voordeel meer biedt die strategie te kennen.  $P$  moet er bij voorbaat al rekening mee houden dat  $Q$  hem kan verhinderen meer dan de minimale winst te verkrijgen, die bij

elk van zijn strategieën behoort. Hij moet dus die strategie kiezen, die hem dan toch nog de grootste „minimale winst” oplevert. Hij is er dan van verzekerd dat hij tenminste die winst, of eventueel meer krijgt.

$Q$  kiest op dezelfde manier zijn optimale strategie uit zijn eigen tabel, maar omdat wij willen volstaan met de tabel van  $P$ , moeten wij aan de hand van deze tabel beredeneren wat de optimale strategie van  $Q$  is.

$Q$  dient te veronderstellen dat hij, als eerste, reeds zijn zet gedaan heeft.  $P$  zal steeds zijn strategie zodanig kiezen dat hij een maximale winst kan nemen.  $Q$  moet dus bij elk van zijn strategieën nagaan wat de „maximale winst” voor  $P$  kan zijn en dan een optimale strategie zo kiezen dat de „maximale winst” van  $P$  zo klein mogelijk is.

Wij passen deze aanbevelingen toe op de tabel voor  $P$ .

$Q$  roept:

		hé	hou	vast	min. winst bij elke strategie van $P$	
$P$ roept:	hé	-3	-2	3	-3	0 = grootste min. winst
	hou	4	0	1	0	
	vast	2	-1	-4	-4	
		4	0	3	max.	winst van $P$ bij elke strategie van $Q$ .
		0 = kleinste max. winst				

We zien dus dat de optimale strategie van  $P$ , dat is die waarbij hij van de grootste min. winst verzekerd is, de uitroep „hou” is.

De optimale strategie van  $Q$  is „hou”, hij is er dan zeker van dat hij aan  $P$  nooit meer dan de kleinste max. winst zal moeten betalen.

Het komt lang niet altijd voor dat de grootste min. winst en de kleinste max. winst gelijk zijn, zoals hier het geval is. In dit spel is dus reeds bij voorbaat te voorspellen dat de uitkomst voor beide spelers nul zal zijn. *Als een van de spelers van zijn optimale strategie afwijkt kan hij er hoogstens op achteruit gaan.* Dit spel heeft dus een stabiele oplossing die zo luidt:

$$P: „hou”; \quad Q: „hou”; \quad v_{opt}(P) = 0 = v_{opt}(Q).$$

Noot 1) *Mathematische formulering.*

Wij definiëren een  $f(x, y)$ , die slechts reële, discrete waarden  $v_{xy}$  aanneemt.  $v_{xy}$  is de winst van de speler  $P$  als  $P$  de strategie  $x$  kiest en  $Q$  de strategie  $y$ . Er is een eindig



aantal strategieën  $x$  en  $y$ ; deze liggen in een eindig interval.

De waarden  $v_{xy}$  vormen een  $n \times m$  matrix  $A$ :

Vervolgens definiëren wij de operatoren  $\max_x$  en  $\min_y$ .

De bewerking  $\min_y f(x, y)$  houdt in dat

voor elke discrete  $x$  het minimum wordt gezocht van  $f(x, y)$ . Dit treedt op voor

een bepaalde  $y$  bij die  $x$ . In totaal zijn er  $m$  van deze  $\min_y f(x, y)$ . De grootte van  $f(x, y)$  in deze groep is nu nog slechts een functie van  $x$ .

Het maximum van deze groep vinden wij bij een zekere  $x$  als wij de operator  $\max_x$  laten werken op  $\min_y f(x, y)$ . Dit maximum is  $\max_x \min_y f(x, y)$ . Evenzo houdt de bewerking  $\max_x f(x, y)$  in dat voor elk discrete  $y$  het maximum van  $f(x, y)$  wordt gezocht. Er zijn in totaal  $n$  van deze  $\max_x f(x, y)$ . De grootte van  $f(x, y)$  in deze groep is slechts afhankelijk van  $y$ . Het minimum van de groep vinden wij met behulp van de operator  $\min_y$ , dit is  $\min_y \max_x f(x, y)$ .

Het is duidelijk dat  $\min_y f(x, y) \leq f(x, y)$  en tevens dat  $f(x, y) \leq \max_x f(x, y)$ . Dus is ook  $\min_y f(x, y) \leq \max_x f(x, y)$ .

Wij hebben gezien dat  $\max_x f(x, y)$  onafhankelijk is van  $x$ , dus geldt  $\max_x \min_y f(x, y) \leq \max_x f(x, y)$ .

Tenslotte is  $\max_x \min_y f(x, y) \leq \min_y \max_x f(x, y)$  omdat het linker lid onafhankelijk is van  $y$ .

Vervolgens definiëren wij een zadelpunt van de matrix:  $|x_0 y_0|$ . Dit is een zadelpunt als  $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$ . Een nodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van  $|x_0 y_0|$  is de gelijkheid van  $\max_x \min_y f(x, y)$  en  $\min_y \max_x f(x, y)$ .

Als het zadelpunt bestaat zijn  $x_0$  en  $y_0$  optimale strategieën. *Opmerking:* een aselekt opgestelde  $2 \times 2$  matrix heeft 2 tegen 1 een zadelpunt, een  $4 \times 4$  matrix 1 tegen 8 en een  $9 \times 9$  matrix 1 tegen 1000.

Wij zullen nu de oplossing zoeken van een spel, waarbij de grootste min. winst en de kleinste max. winst niet gelijk zijn



Toevalligerwijze is de rechtertabel, die van  $Q$ , daarvoor te gebruiken. De getallen stellen nu niet meer de winst van  $Q$  voor, maar die van  $P$ .

$Q$  roept:

		hé	hou	vast	
$P$ roept:	hé	3	2	-3	-3
	hou	-4	0	-1	-4
	vast	-2	1	4	-2
		3	2	4	

- 2 = grootste min. winst van  $P$

2 = kleinste max. winst van  $P$ .

De grootste min. winst van  $P$  is - 2 en de kleinste max. winst is + 2; zij vallen dus inderdaad niet samen.

Wij laten  $P$  weer beginnen. Door het spelen van zijn optimum strategie „vast” kan hij zich tegen een verlies van meer dan 2 vrijwaren.  $Q$  kiest „hé”:  $v(P) = - 2$ .

Vervolgens begint  $Q$ . Zijn optimum strategie is „hou”.  $P$  kiest „hé”:  $v(P) = + 2$ .

De derde mogelijkheid is dat  $P$  en  $Q$  hun zetten tegelijkertijd doen.  $P$  bedenkt nu, om een voorbeeld te noemen, dat  $Q$  van de veronderstelling zal uitgaan dat hij,  $P$ , zijn optimale strategie blijft gebruiken. Het beste dat  $Q$  zou kunnen doen in die situatie is „hé” roepen;  $P$  besluit zijn keuze daarop te baseren en roept „hé”. Maar  $Q$  heeft de list voorzien en roept „vast” in plaats van „hé”, met het gevolg dat  $v(P) = - 3$ .

Door een opsomming van de talloze mogelijkheden komen wij niet veel verder. Al wat wij voorlopig over een „oplossing” kunnen zeggen, is dat degene, die het best de strategie van de ander raadt, de meeste kans op winst heeft. Dat klinkt wel zeer onbevredigend voor een oplossing, die mathematisch volledig moet zijn. Het zal blijken dat wij met een aanvulling de theorie kunnen redden.

In het voorgaande waren wij tot de conclusie gekomen dat een speler moet vermijden dat hij in de positie van beginnende speler geraakt doordat de andere zijn strategie raadt. Dat gevaar dreigt vooral als  $P$  en  $Q$  het spel meermalen spelen. Behalve dat de spelers elkaars gewoonten leren kennen is het gebleken dat op den duur toch een zekere periodiciteit niet te vermijden is, hoe goed de speler ook zijn best doet om op willekeurige wijze de keus uit zijn strategieën te maken.

Voordat wij verder gaan bezien wij nog eens de tabel van

ons tweede voorbeeld. In plaats van de gehele tabel schrijven wij alleen de matrix op:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Over de kolommen (verticaal) kunnen wij niets bijzonders zeggen, maar als wij de rijen (horizontaal) onderling vergelijken valt het ons op dat elk element van de onderste rij groter is dan het corresponderende element van de middelste rij:  $-2 > -4$ ,  $1 > 0$ ,  $4 > -1$ . Dat betekent dat, wat  $Q$  ook doet,  $P$  in ieder geval beter af is met zijn strategie „vast” dan met „hou”. De strategie „hou” wordt gedomineerd door „vast”.  $P$  is wel zo wijs deze strategie nooit te kiezen. Wij laten nu deze strategie uit de tabel weg, waardoor de matrix wordt gereduceert tot:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Voor  $P$  blijft dus de keus uit „hé” of „vast” over. Hij wil die keus zo maken dat  $Q$  nooit met zekerheid kan voorspellen welke zet hij,  $P$ , in de volgende partij zal doen. Als  $P$  op zijn intuïtie af zou willen gaan moet hij er op rekenen dat  $Q$  op den duur toch een regelmaat weet te ontdekken. Hij kan dus beter een munt opgooien en „hé” kiezen op kruis, „vast” op munt. Van te voren is dan alleen te zeggen dat in een groot aantal, bijv.  $N$  partijen, „hé” even vaak gekozen zal worden als „vast”. De volgorde is evenwel van begin tot eind willekeurig. Hij maakt a.h.w gebruik van een „gemengde strategie”.

Het kan  $P$  natuurlijk overkomen dat hij af en toe een verlies van  $-3$  zal moeten incasseren. Het interesseert ons echter of hij op den duur beter af zal zijn door „hé” en „vast” met gelijke waarschijnlijkheid te kiezen, dan door steeds „vast” te roepen. Wij kunnen ons bovendien afvragen of een waarschijnlijkheid van voorkomen ( $\frac{1}{2} N$ ,  $\frac{1}{2} N$ ) wel de juiste is. Misschien is er een betere verdeling, die wij voorlopig door  $(p, 1-p)$  voorstellen, waardoor  $P$  in  $N$  partijen nog meer kan winnen, d.w.z. waardoor zijn mathematische verwachting  $E(P)$  groter wordt. De mathematische verwachting is dan de gemiddelde winst per partij. Daarbij moet hij er op rekenen dat ook  $Q$  zijn strategieën willekeurig kiest, zo, dat „hé” bijv.  $q_1 \cdot N$  keer voorkomt, „hou”  $q_2 \cdot N$  en „vast”  $q_3 \cdot N$  keer. ( $q_1 + q_2 + q_3 = 1$  en  $q_1, q_2$  en  $q_3$  zijn positief of nul).



Wij zullen nu de mathematische verwachting van  $P$  berekenen als hij voor het maken van zijn keus een munt gebruikt ( $p = \frac{1}{2}$ ).

$$E(P) = (\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot -2) q_1 + (\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1) q_2 + (\frac{1}{2} \cdot -3 + \frac{1}{2} \cdot 4) q_3 = \\ = \frac{1}{2} \cdot q_1 + 1\frac{1}{2} \cdot q_2 + \frac{1}{2} \cdot q_3 = \frac{1}{2} + q_2.$$

Hieruit kunnen wij concluderen dat  $Q$  nooit „hou” moet kiezen. Dan is nl.  $q_2 = 0$  en  $E(P)$  ten hoogste  $\frac{1}{2}$ .

Verder blijkt dat  $E(P)$  onafhankelijk is van  $q_1$  en  $q_3$ , derhalve is  $P$  zeker van een gemiddelde winst  $\frac{1}{2}$  per partij, welke waarschijnlijkheidsverdeling  $Q$  ook toepast.  $Q$  heeft er dus niets aan om te weten dat  $P$ 's verdeling  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  is. De optimale gemengde strategie voor  $P$  is hier dus  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Wij vermoeden dat er ook voor  $Q$  een verdeling moet zijn, zo, dat  $P$  er niets aan heeft deze te kennen. (Hij heeft er natuurlijk wel wat aan te weten wat de volgende zet van  $Q$  zal zijn!).

In dat geval is de theorie juist en kunnen wij op een stabiele oplossing rekenen.

Wij schrijven de mathematische verwachting voor  $P$  nog eens op; de verdeling van  $P$  stellen wij  $(p, 1-p)$  en die van  $Q$   $(q, 1-q)$ .

$$E(P) = 3pq - 3p(1-q) - 2(1-p) \cdot q + 4(1-p)(1-q) = \\ = (1-2p)(3\frac{1}{2} - 6q) + \frac{1}{2}.$$

Stel nu dat  $P$  bewust „hé” vaker wil kiezen dan „vast”, dus  $p > \frac{1}{2}$ , dan is  $(1-2p) < 0$ . In dat geval kan  $Q$  door  $q = 1$  te kiezen  $E(P)$  zeer negatief maken.

Stel daarentegen dat  $P$  vaker „vast” kiest, dus  $p < \frac{1}{2}$ , dan wordt  $(1-2p) > 0$ . Nu kan  $Q$  door  $q = 0$  te nemen weer  $E(P)$  zeer negatief maken.

Dezelfde redenering geldt voor  $Q$ . Hij moet  $q$  zo kiezen dat  $p$  geen invloed meer heeft in de vergelijking voor  $E(P)$ . Dat betekent dat hij  $q = \frac{3,5}{6} = \frac{7}{12}$  moet kiezen, waardoor de term

$(1-2p)(3\frac{1}{2} - 6q)$  verdwijnt. In dat geval heeft  $P$  er niets aan de gemengde strategie van  $Q$  te kennen, want een wijziging in de keuze van  $p$  levert geen vergroting van  $E(P)$  op; daar komt nog bij dat  $Q$  zijn strategie ten nadele van  $P$  kan wijzigen zodra  $p \neq \frac{1}{2}$  is.

Wij hebben dus nu een stabiele oplossing gevonden voor het tweede spel:



voor  $P$  de gemengde strategie („hé”, „hou”, „vast”) =  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$   
 voor  $Q$  de gemengde strategie („hé”, „hou”, „vast”) =  $(\frac{7}{12}, 0, \frac{5}{12})$

$$E(P) = \frac{1}{2} = -E(Q)$$

$Q$  kan weliswaar geen munt gebruiken als kanselement, maar in dit geval is bijv. de secondewijzer van zijn horloge heel geschikt. Valt het moment van keuze in de eerste 35 sec van een minuut dan kiest  $Q$  „hé”, valt dit moment in de laatste 25 sec van een minuut dan kiest  $Q$  „vast”.

Ons betoog is geldig voor een groot aantal partijen. Als er slechts één partij gespeeld wordt, staan er voor  $P$  twee wegen open: of zijn gemengde strategie spelen, dan is  $E(P) = \frac{1}{2}$ , maar ook riskeert hij dan het verlies van  $-3$ ; of zijn zg. „pure” optimale strategie „vast” kiezen en een verlies van maximaal  $-2$  aanvaarden.

Noot 2) *Mathematische formulering.*

Als de matrix geen zadelpunt heeft, dus  $\max_x \min_y f(x, y) < \min_y \max_x f(x, y)$ , dan maken de spelers gebruik van een combinatie van strategieën.

De speler  $P$  kiest een gemengde strategie  $\vec{P}$ , waarin de strategie  $x_i$  voorkomt met waarschijnlijkheid  $p_i$ .

$$\vec{P} = |p_1 p_2 \dots p_m| \text{ en } \sum_1^m p_i = 1.$$

De speler  $Q$  kiest  $\vec{Q} = |q_1 \dots q_n|$  en  $\sum_1^n q_i = 1$

De mathematische verwachting van  $P$  is  $E(\vec{P}, \vec{Q}) =$

$$= p_1 q_1 v_{11} + p_1 q_2 v_{12} + \dots = \sum_{y=1}^n \sum_{x=1}^m p_x q_y v_{xy}$$

$P_0$  en  $Q_0$  zijn optimale strategieën, als:

$$E(\vec{P}, \vec{Q}_0) \leq E(\vec{P}_0, \vec{Q}_0) \leq E(\vec{P}_0, \vec{Q}), \text{ dus ook:}$$

$$\max_{\vec{P}} \min_{\vec{Q}} E(\vec{P}, \vec{Q}) = \min_{\vec{Q}} \max_{\vec{P}} E(\vec{P}, \vec{Q})$$

De grootheden  $\max \min E$  en  $\min \max E$  bestaan altijd en zijn gelijk.

Stel nu|dat  $P$  en  $Q$  beschikken over een oneindig aantal

strategieën. Dit is bijv. het geval bij het duel. De keuze van een strategie is de keuze van het moment, waarop geschoten wordt. De „winst” is nu een continue functie  $M(x, y)$  (in het eenheidsvierkant).

In plaats van een discrete waarschijnlijkheidsverdeling wordt nu een distributiefunctie gebruikt, stel  $F(x)$  door speler  $P$ , en  $G(y)$  door  $Q$ . Evenals in het discrete geval bestaan altijd

$$\max_F \min_G \int_0^1 \int_0^1 M(x, y) dF(x) dG(y) \quad \text{en}$$

$$\min_G \max_F \int_0^1 \int_0^1 M(x, y) dF(x) dG(y)$$

en zijn altijd aan elkaar gelijk. Er zijn dus steeds optimale strategieën  $F_0(x)$  en  $G_0(y)$  te vinden voor  $P$  en  $Q$ . (Een distributiefunctie  $F(a)$  geeft de waarschijnlijkheid dat het gekozen getal op zijn hoogst  $a$  is).

#### 4. De grafische oplossingsmethode.

Algemeen kunnen wij voor de oplossing van een spel voor twee personen (met één zet voor elk) deze richtlijnen geven: Onderzoek de matrix van het spel, d.w.z. vergelijk de minima van de rijen en kies het grootste minimum (max. rij-min.) als dat mogelijk is. Vergelijk ook de maxima van de kolommen en kies daarvan de kleinste (min. kol.-max.) als dat mogelijk is. Als nu max.rij-min. en min. kol.-max. samenvallen in de matrix (het eerste spel is hier een voorbeeld van) dan hebben wij de oplossing al gevonden: voor  $P$  de strategie, die behoort bij de rij met het grootste minimum, voor  $Q$  de strategie, die behoort bij de kolom met het kleinste maximum en

$$\max \text{ rij-min } v(P) = v(P)_{opt} = -v(Q)_{opt} = \min \text{ kol-max } v(P)$$

Wij zeggen dat spelen van deze soort een matrix hebben met een „zadelpunt”. Een zadelpunt is dat element van een matrix, dat zowel het kleinste element is van de rij waarin het ligt, als het grootste element van de kolom waartoe het behoort. Visueel kunnen wij ons voorstellen dat het zadel als het ware in horizontale richting ligt met de stijgbeugels in één van de kolommen, terwijl wij er bovenop kijken.

Als een spel evenwel geen zadelpunt heeft, d.w.z. dat max. rij-min. en min. kol.-max. niet samenvallen of niet aanwezig zijn, dan moeten wij de keus over verschillende strategieën verdelen,

zodat elk met een bepaalde waarschijnlijkheid, maar overigens willekeurig, voorkomt. (Het tweede spel is hiervan een voorbeeld). In plaats van pure winst of verlies van  $P$  komt nu de „mathematische verwachting” van  $P$ ,  $E(P)$ , in een nieuwe tabel te staan, de „pure” strategieën worden vervangen door gemengde strategieën.

Wij beweren nu dat de matrix van de nieuwe tabel *altijd* een zadelpunt heeft. (het mathematisch bewijs vindt men in: McKinsey's „Introduction to the Theory of Games”).

Wij kunnen dus altijd een oplossing vinden: voor  $P$  de gemengde strategie, die behoort bij het grootste minimum van zijn mathematische verwachting  $E(P)$ , voor  $Q$  de gemengde strategie, die behoort bij het kleinste maximum van  $E(P)$  en

$$\max \text{rij-min } E(P) = E(P)_{\text{opt}} = -E(Q)_{\text{opt}} = \min \text{kol-max } E(P)$$

Ter verduidelijking zullen wij nog eens het tweede spel oplossen en nu gebruik maken van grafieken (dit zijn dus afbeeldingen van de  $E(P)$ -tabel). De tabel was inmiddels gereduceerd tot:

$Q$  roept:

		„hé”	„vast”
$P$ roept:	„hé”	3	- 3
	„vast”	- 2	4

$P$  roept „hé” en „vast”, resp. met een waarschijnlijkheid  $p$  en  $1 - p$ .

$Q$  roept „hé” en „vast”, resp. met een waarschijnlijkheid  $q$  en  $1 - q$ .

Als  $Q$  alleen „hé” roept is  $q = 1$  en de mathematische verwachting van  $P$  kan worden voorgesteld door een rechte lijn:

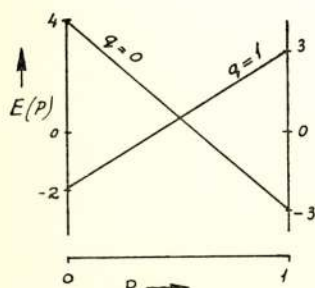


Fig. 1.

$$E(P) = p \cdot 3 + (1 - p) \cdot -2 = 5p - 2$$

Als  $P$  nu alleen „hé” roept is  $p = 1$  en  $E(P) = 3$ . Als  $P$  alleen „vast” roept is  $p = 0$  en  $E(P) = -2$ . Daarmee hebben we de rechte

$$E(P) = 5p - 2, q = 1 \text{ (fig. 1) vastgelegd.}$$

Als  $Q$  alleen „vast” roept, is  $q = 0$ . Nu kan  $E(P)$  worden voorgesteld door  $E(P) = p \cdot -3 + (1 - p) \cdot 4 = -7p + 4$ .



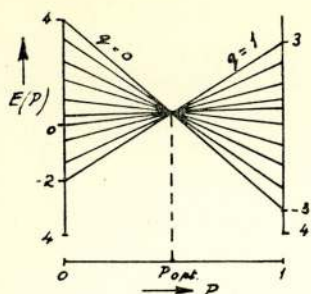


Fig. 2.

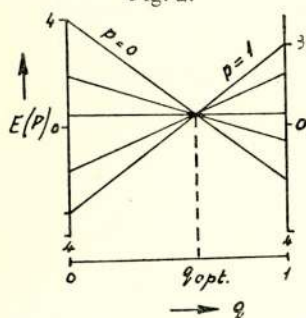


Fig. 3.

Voor elke andere  $q$ , die dus van 0 tot 1 kan variëren, wordt  $E(P)$  voorgesteld door een lijn uit de bundel  $E(P) = q(5p - 2) + (1 - q)(-7p + 4)$  (fig. 2).

In plaats van  $q$  expliciet te schrijven kunnen wij dit ook met  $p$  doen. Wij krijgen dan een nieuwe bundel met  $p$  als parameter.

$$E(P) = p(6q - 3) + (1 - p)(-6q + 4) \quad (\text{fig. 3}).$$

Tenslotte kunnen wij beide grafieken tot één driedimensionale grafiek verenigen. Het zadelvormige karakter van  $E(P)$  komt daarin duidelijk tot uiting. Het zadelpunt is het basispunt (snijpunt) van de beide bundels.

$Q$  kan door variatie van  $q$  de helling veranderen van de lijn  $E(P)$  (graf. 2). De optimale stand van deze lijn is voor  $Q$  de horizontale. In dat geval heeft  $P$  er niets aan om  $q$  te kennen, want bij wijziging van  $p$  blijft  $E(P)$  toch gelijk. Een kleinere  $E(P)$  dan die van het zadelpunt kan  $Q$  door

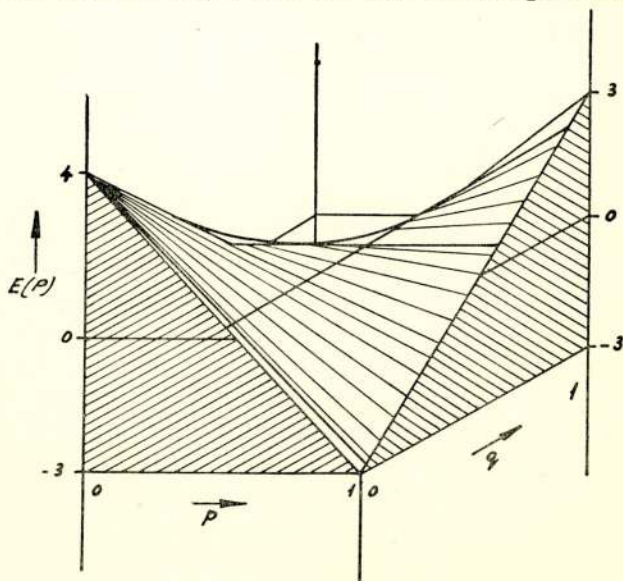


Fig. 4.

geen enkele verandering van  $q$  bewerkstelligen, mits  $P$  zich houdt aan  $p$  opt. (fig. 2).

De minima van  $E(P)$  voor elke  $p$  liggen op de onderste gearceerde gebroken lijn (fig. 5), de maxima op de bovenste. Wij zien dat het kleinste maximum en het grootste minimum in het basispunt samenvallen. Als  $Q$  zijn strategie „hou” wil mengen met „hé” of „vast” ontstaan twee andere zadelpunten,  $z_2$  en  $z_3$ , door snijding met de lijn

$$E(P) = p \cdot 2 + (1 - p) \cdot 1$$

die geldig is voor het geval dat  $Q$  alleen „hou” gebruikt. Maar elk van deze beide nieuwe zadelpunten zou voor  $P$  een grotere  $E(P)$  betekenen. Dit is dus de methode om grafisch te onderzoeken welke strategieën  $Q$  niet moet gebruiken als hij over meer dan twee beschikt.

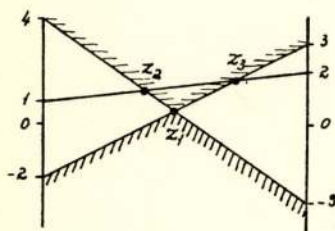


Fig. 5.

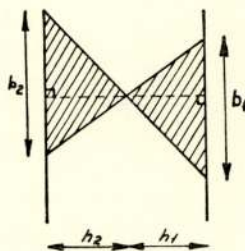


Fig. 6.

Wij moeten nu nog  $p$  en  $q$  uit de grafieken 2 en 3 oplossen. Daarbij maken we gebruik van de gelijkvormigheid van de twee gearceerde driehoeken (fig. 6). Dan is  $b_1 : b_2 = h_1 : h_2$ , of het verschil tussen de elementen van de bovenste rij ( $b_1$ ) staat tot het verschil van de elementen van de onderste rij ( $b_2$ ) als  $(1 - p)$  staat tot  $p$ . Dit is hetzelfde als: het verschil van de elementen van de linker kolom staat tot het verschil van de elementen van de rechterkolom als  $(1 - q)$  staat tot  $q$ . Daarmee hebben we dus meteen een vuistregel gevonden voor de oplossing van spelen met twee strategieën ( $2 \times 2$  matrix). De oplossing van spelen met een grotere matrix kunnen wij slechts door berekening uitvoeren. De formules, die daarvoor gebruikt worden vindt men in het boek van McKinsey.

## 5. Strategische spelen in extensieve vorm.

Een strategie schrijft voor hoe een speler dient te handelen in elke mogelijke situatie, die zich tijdens het spel kan voor-

doen. Daarom was de benaming „strategie” voor één zet van een speler in de vorige paragraaf weliswaar nogal ruim, maar toch in feite juist.

Wij willen nu de oplossing zoeken van spelen, waarbij een partij bestaat uit meer dan twee zetten. Een voorbeeld hiervan is schaak. Als het mogelijk is om iedere partij van een spel voor te stellen door de combinatie van een strategie van  $P$  met een strategie van  $Q$ , dan is het spel te reduceren tot een spel met slechts één zet voor elke speler. Deze zet is de keuze van een optimale strategie. Wij noemen dit een reductie van de „extensieve” vorm van het spel tot de „genormaliseerde” vorm. De strategieën van  $P$  en  $Q$  worden hierbij in tabelvorm opgeschreven en de oplossing van de genormaliseerde vorm is dan te vinden met de methode uit de vorige paragrafen.

Als voorbeeld zullen wij nu een spel met bridgekaarten reduceren tot de genormaliseerde vorm. Dit spel bestaat uit drie zetten:  $P$  doet de eerste zet en de derde zet,  $Q$  de tweede. Elke zet vertegenwoordigt een keuze uit twee mogelijkheden. Wij gaan uit van alle kaarten beneden de tien. Vier kaarten van dit stel worden open neergelegd, zoals bij bridge noemen wij ze noord, oost, zuid en west. Een vijfde kaart wordt open in het midden gelegd. Alle rode kaarten tellen positief en alle zwarte negatief, dus harten-vijf heeft de waarde  $+5$ , klaver-vier de waarde  $-4$ .

Omdat wij verder alleen met de som van de kaarten noord  $+$  zuid en oost  $+$  west te maken krijgen, schrijven wij deze som resp. als  $nz$  en  $ow$ ; de waarde van de kaart in het midden duiden wij met  $m$  aan.

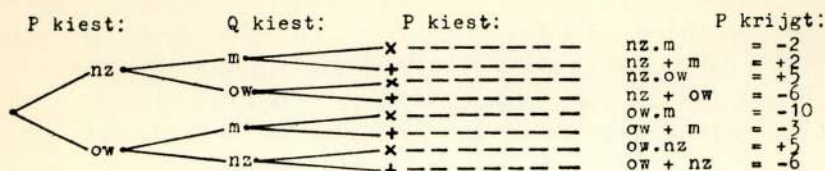
In de eerste zet kiest  $P$  hetzij  $nz$ , hetzij  $ow$ . Vervolgens maakt  $Q$  een keus uit de kaart in het midden ( $m$ ) en de overgebleven combinatie  $nz$  of  $ow$ . Tenslotte kiest  $P$  vermenigvuldigen of optellen. De winst van  $P$ , dit is het verlies van  $Q$ , wordt nu als volgt berekend: Al naar gelang  $P$  de laatste keuze bepaald heeft, wordt het getal, dat uit zijn eerste zet voortgekomen is, vermenigvuldigd met, of opgeteld bij het getal, dat uit de keuze van  $Q$  is voortgekomen. Wij willen dit aan de hand van een voorbeeld verduidelijken. Hier is  $nz = -1$ ,  $ow = -5$  en  $m = 2$ .

$$\begin{aligned} & [\text{noord} = -4] \\ & [\text{west} = -3] - [\text{midden} = +2] - [\text{oost} = -2] \\ & [\text{zuid} = +3] \end{aligned}$$

Stel dat  $P$   $nz$  kiest, vervolgens kiest  $Q$   $m$  en tenslotte kiest



$P$  vermenigvuldigen. Nu krijgt  $P$  van  $Q$  het bedrag  $-1 \times 2 = -2$ , d.w.z. hij moet twee cent betalen. Wij geven nu dit voorbeeld in een schema weer, waarin elke mogelijkheid is opgenomen (de zg. extensieve vorm).



Een partij van dit spel kan dus op 8 manieren gespeeld worden. Het is de taak van de speltheorie hieruit een optimale strategie voor  $P$  en voor  $Q$  te vinden.

De oplossing kan op dezelfde wijze worden gevonden als in het vorige spel, als wij de strategieën in een tabel opschrijven. Om dit te vergemakkelijken voeren wij een symbolische notatie in. Als voorbeeld moge een willekeurige strategie van  $P$  dienen: „Kies eerst  $nz$ ; als  $Q$  dan  $m$  kiest, neem dan optellen, maar als  $Q$   $ow$  kiest, neem dan vermenigvuldigen”. Dit wordt nu geschreven als:  $(nz)(m/+, ow/\times)$ .

Wij schrijven nu het gehele spel in de genormaliseerde vorm:

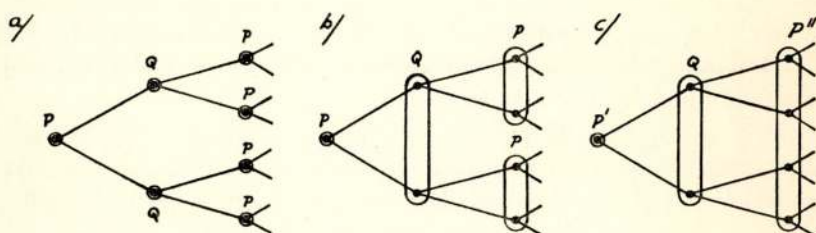
$P$ :	$Q$ :				rij-min.
	$(nz/m, ow/m)$	$(nz/m, ow/nz)$	$(nz/ow, ow/m)$	$(nz/ow, ow/nz)$	
$(nz)(m/\times, ow/\times)$	-2	-2	+5	+5	-2
$(nz)(m/\times, ow/+)$	-2	-2	-6	-6	-6
$(nz)(m/+, ow/\times)$	+1	+1	+5	+5	+1
$(nz)(m/+, ow/+)$	+1	+1	-6	-6	-6
$(ow)(m/\times, nz/\times)$	-10	+5	-10	+5	-10
$(ow)(m/\times, nz/+)$	-10	-6	-10	-6	-10
$(ow)(m/+, nz/\times)$	-3	+5	-3	+5	-3
$(ow)(m/+, nz/+)$	-3	-6	-3	-6	-6

kol.max.    $\parallel +1$     $+5$     $+5$     $+5 \parallel$

Rechts van de tabel zijn reeds de rij-minima opgeschreven en onder de tabel de kolom-maxima. Het blijkt dat  $\max.\text{rij-min.} = \min.\text{kol-max.} = +1$ , er is dus een zadelpunt en de optimale strategie voor  $P$  luidt:  $(nz)(m/+, ow/\times)$ , terwijl die voor  $Q$  is:  $(nz/m, ow/m)$ .  $Q$  betaalt +1 aan  $P$ .

Wij vragen ons nu af of het ook mogelijk is om een oplossing te vinden als  $P$  en  $Q$  ons kaartspel „blind” spelen, d.w.z. als zij van elkaars zetten niet volledig op de hoogte zijn. Dit kunnen wij bewerkstelligen door  $P$  te laten opschrijven wat hij in de eerste en derde zet zal doen en aan  $Q$  te vragen om hetzelfde te doen voor de tweede zet. Vervolgens berekenen wij de uitkomst volgens de spelregels aan de hand van de door  $P$  en  $Q$  opgegeven strategieën.

Het verschil tussen de speelmethode met „volledige informatie” en die met „incomplete informatie” kunnen wij weergeven in het extensieve schema. Dit doen wij voor de vertakkingspunten waartussen een speler geen onderscheid kan maken (omdat hij niet weet wat in de vorige zet gebeurd is) gezamenlijk te omlijnen. Binnen een omlijning staan dus een aantal punten, waarvan wij kunnen zeggen dat zij behoren tot dezelfde verzameling; dit is a.h.w. een „informatie-verzameling”. Volledigheidshalve worden ook de „verzamelingen”, die uit slechts één element bestaan, omlijnd.



Het eerste schema a) stelt het kaartspel voor, zoals dit met volledige informatie wordt gespeeld. Het schema b) stelt het geval voor dat  $P$  en  $Q$  van elkaars zetten niet op de hoogte zijn:  $Q$  bijv. weet niet of zijn keuze, linksaf of rechtsaf, betrekking heeft op het bovenste of onderste punt van zijn verzameling.

Het derde schema c) stelt voor dat de oorspronkelijke speler  $P$  is vervangen door een team van spelers  $P'$  en  $P''$ , terwijl speler  $P''$  niet op de hoogte is van wat  $P'$  in de eerste zet gedaan heeft.

De mogelijkheid c) laten wij hier buiten beschouwing.

Wij zullen nu het geval b) oplossen om te zien of er verschil is met het geval a).

Een strategie van  $P$  bestaat bijv. uit: „Kies  $nz$  en vermenig-

vuldigen", dit schrijven wij aldus op:  $(nz, \times)$ . De strategieën van  $Q$  zijn „midden” en „overgebleven combinatie”.

$P:$	$Q:$		$rij-min.$
	$(m)$	$(ov.comb.)$	
$(nz, \times)$	- 2	+ 5	$\left\  \begin{array}{c} - 2 \\ - 6 \\ - 10 \\ - 6 \end{array} \right\ $
$(nz, +)$	+ 1	- 6	
$(ow, \times)$	- 10	+ 5	
$(ow, +)$	- 3	- 6	
$kol-max. \left\  + 1 \quad + 5 \right\ $			

Blijkbaar vallen  $max.rij-min.$  en  $min.kol-max.$  niet samen. Wij moeten dus de gemengde strategieën berekenen. Deze blijken voor  $P$  te zijn:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$  en voor  $Q$ :  $(\frac{11}{14}, \frac{3}{14})$ .  $F$  moet dus  $nz$  kiezen en met gelijke waarschijnlijkheid vermenigvuldigen of optellen. Zijn mathematische verwachting is dan:

$$E(P) = \frac{1}{2} \cdot -2 + \frac{1}{2} \cdot +1 = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot +5 + \frac{1}{2} \cdot -6 = -\frac{1}{2}.$$

Het blijkt dus waar te zijn wat wij intuïtief al kunnen aanvoelen, nl. dat het ontbreken van informatie voor  $P$  een verlies oplevert. Toevalligerwijze ondervindt  $Q$  in dit spel geen nadeel van het informatiegebrek; dit is echter geen regel.

Men kan bewijzen dat spelen met volledige informatie altijd een zadelpunt hebben (schaak).

Met ons kaartspel kunnen wij tevens demonstreren dat een spel met incomplete informatie (geval  $b$ ) zowel zonder als met zadelpunt kan voorkomen. Het is gemakkelijk uit te rekenen dat er geen zadelpunt is (geval  $b$ ) als  $m$  positief is, terwijl  $nz$  en  $ow$  beide negatief zijn. In alle andere voorkomende mogelijkheden heeft de matrix wel een zadelpunt, d.w.z. dat in die gevallen dus ons kaartspel evengoed „blind” als „open” gespeeld kan worden.

## 6. Coalities.

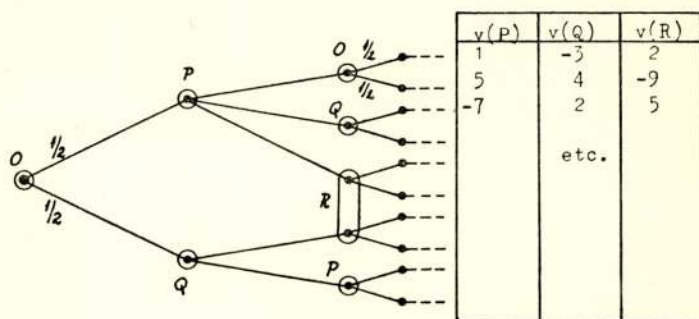
In tegenstelling tot de theorie van de „twee-personen spelen met som nul”, die mathematisch een afgerond geheel vormt, levert de theorie van alle overige klassen van spelen nog tal van moeilijkheden op. Het rote probleem is de definitie van een „oplossing”.

De oplossing, zoals wij die voor de twee-personen spelen geformuleerd hebben, is niet meer afdoende zodra het de spelers toegestaan wordt om coalities te vormen. Dit is natuurlijk



alleen mogelijk bij spelen voor meer dan twee personen. De „oplossing” van een  $n$ -personen spel moet aanduiden welke coalities tenslotte kunnen ontstaan en hoe de winst onder de spelers verdeeld moet worden. Voordat wij hier verder op ingaan verduidelijken wij het coalitiebegrip aan de hand van een drietal voorbeelden.

Zolang coalitievorming niet is toegestaan kunnen wij elk willekeurig  $n$ -personen spel in de extensieve vorm oplossen. Dit levert geen bijzondere moeilijkheden op. Zelfs het gebruik van een kans-element, bijv. een dobbelsteen, kan in het extensieve schema worden weergegeven. Dit wordt dan aangeduid als de fictieve speler  $O$ . Als voorbeeld geven wij het schema van een lukraak verzonnen spel voor drie personen. Het spel begint met het opgooien van een munt. Al naar gelang kruis of munt boven komt is de beurt aan  $P$  of  $Q$ . De speler  $R$  is hiervan echter niet op de hoogte, zoals aan het schema te zien is. In de tabel staat de winst of het verlies van elk der spelers aangegeven.



De methode, die wij in par. 4 en 5 aangegeven hebben, stelt ons in staat om optimale strategieën voor de drie spelers aan te geven.

Het is echter bijkans vanzelfsprekend dat bijv. de speler  $P$  zal trachten door middel van steekpenningen de keuze van een strategie, door  $Q$  bijvoorbeeld, te beïnvloeden, om hierdoor zelf meer winst te kunnen behalen ten koste van de derde speler. Het spel is een 2-personen spel geworden tussen de coalitie  $P-Q$  en de speler  $R$ .

Welke van de 3 coalities  $P-Q$ ,  $Q-R$  of  $P-R$  ontstaan zal is onder meer afhankelijk van de samenstelling van de winst en verlies tabel. Factoren, die feitelijk buiten het spel staan, blijken echter mede van invloed te zijn. Experimenten hebben bijv. aangetoond dat de sociale status van de spelers dikwijls tot de

vorming van bepaalde coalities aanleiding geeft. Afgezien van externe factoren kan de voorsprong, die één van de spelers behaald heeft in het spel zelf, er de oorzaak van zijn dat de overigen zich spontaan aaneensluiten. Deze coalities zijn echter zeer instabiel; zodra een van de coalitiegenoten een potentieel gevaar voor de anderen is gaan vormen, keert een nieuwe coalitie zich onmiddellijk tegen hem.

Het ontstaan van een coalitie is natuurlijk gebonden aan de voorwaarde dat deelneming een speler grotere winst moet garanderen dan hij alleen zou kunnen behalen. In formule:

$$v(P + Q) > v(P) + v(Q)$$

Als tweede voorbeeld beschouwen wij de klasse van spelen waarbij de som van winst en verlies niet gelijk is aan nul.

Wij gaan uit van een eenvoudig spel voor twee personen,  $P$  en  $Q$ . Elk van de beide spelers dient over een afzonderlijke spelmatrix te beschikken: de som van de corresponderende elementen is niet nul, het verschil wordt aangevuld bijv. door een bank of de natuur. Een dergelijke situatie kan zich voordoen als de waardenormen van de beide spelers niet identiek zijn, zoals veelal bij militaire tegenstanders het geval is.

De matrices van  $P$  en  $Q$  nemen wij bijv.:

$$P: \begin{vmatrix} -2 & +5 \\ +1 & -6 \end{vmatrix} \quad Q: \begin{vmatrix} +3 & -2 \\ -3 & +4 \end{vmatrix}$$

De optimale gemengde strategie voor  $P$  is:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ :  $E(P) = -\frac{1}{2}$

" " " " "  $Q$  " :  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ :  $E(Q) = +\frac{1}{2}$

Wij herinneren er even aan dat  $E(P)$  de mathematische verwachting van  $P$  voorstelt als hij een gemengde strategie kiest en  $v(P)$  de winst is van  $P$  als hij een enkelvoudige (zg. pure) strategie heeft gekozen.

Laat ons echter eens voorstellen dat  $P$  en  $Q$  afspreken dat  $P$  de strategie kiest, behorende bij de bovenste rij en  $Q$  de strategie, behorende bij de rechter kolom. Hun gezamenlijke winst bedraagt in dat geval  $(+5 + -2) = 3$ . Zonder samenwerking zou hun winst gemiddeld  $(-\frac{1}{2} + +\frac{1}{2}) = 0$  zijn geweest. Het is dus duidelijk dat zij een coalitie moeten sluiten tegen de bank of de natuur, die wij als een fictieve speler kunnen opvatten. Deze heeft echter geen invloed op het verloop van het spel. Hetzelfde geldt voor spelen van deze soort met meer dan twee personen.

Wij kunnen nu nog niet uitrekenen hoe  $P$  en  $Q$  de winst



moeten verdelen. Het is echter logisch dat zij tenminste zoveel krijgen als hun winst zou zijn geweest zonder coalitie. Van het restant krijgt  $P$  een deel  $1/a$  en  $Q$   $(1 - 1/a)$ . Wij komen dan tot een oplossing van de volgende gedaante:

$$P: \text{ de strategie behorende bij de bovenste rij, } v(P) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{a}. \quad 3$$

$$Q: \text{ " " " " " rechter kolom, } v(Q) = +\frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{a}). \quad 3$$

Wij hebben in de vorige twee voorbeelden kunnen zien dat zodra meer dan twee spelers aan het spel deelnemen, hun belangen niet meer steeds lijnrecht tegenover elkaar staan. De coalitievorming maakt het essentiële verschil uit tussen de spelen voor twee personen en die voor meer dan twee personen. In het derde voorbeeld brengen wij dit aspect sterk naar voren. Wij beschouwen een drie-personen spel waarin het enige doel van de spelers de vorming van een coalitie ( $S$ ) is. Zodra twee der spelers een coalitie gesloten hebben is de partij beëindigd. De coalitie ( $S$ ) wint een gulden van de derde speler. In formule:  $v(S) = 1$ . De winst van elk der coalitiegenoten zal ongetwijfeld een halve gulden bedragen: indien een van hen tracht om meer dan de halve winst te bedingen zal de ander de voorkeur geven aan de derde speler als partner.

De drie mogelijke coalities en winstverdelingen samen vormen een stabiele oplossing, die wij in een tabel samenvatten.

	gevormde coalitie		
	$S = P + Q$	$S = P + R$	$S = Q + R$
Winst van speler $P$ :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-1$
" " " $Q$ :	$\frac{1}{2}$	$-1$	$\frac{1}{2}$
" " " $R$ :	$-1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Wij zien dus dat een oplossing van een 3-personen spel een verzameling is van winstverdelingen, die onderling gelijkwaardig zijn. Men kan zich geen andere verdeling van de winst indenken, die door een meerderheid van de spelers geprefereerd zou worden boven die van de oplossing. De oplossing vertegenwoordigt a.h.w. een evenwichtstoestand. Hetzelfde geldt ook voor spelen met een willekeurig aantal ( $n$ ) personen.

De oplossing, die wij in ons voorbeeld hebben aangegeven, is niet de enige voor het 3-personen spel. Inplaats van 1 (gulden)



kunnen wij aan de coalitie een winst  $v(S) = c$  toekennen, waarbij  $c$  varieert van nul tot een. Dit komt overeen met het economische (sociale) verschijnsel dat de uitgeslotene vrijwel machteloos is en geheel ( $c = 1$ ) of in mindere mate ( $c < 1$ ) uitgebuit kan worden.

Ons derde voorbeeld is voor de 3-personen spelen belangrijk omdat elk spel uit deze klasse strategisch equivalent is met dit voorbeeld. Twee spelen zijn strategisch equivalent als het mogelijk is om d.m.v. compensaties, voordat de partij begonnen wordt, de winstverdelingen van beide spelen aan elkaar gelijk te maken zonder dat het verloop van de partij hierdoor wordt verstoord.

De winst  $v(S)$  van een coalitie heeft een bijzondere naam, karakteristieke functie, die afkomstig is uit de verzamelingsleer. De winst is nl. afhankelijk van de samenstelling van de coalitie. Hier zijn het de deelnemers aan de coalitie, in de verzamelingsleer de elementen van de verzameling, die de functie bepalen.

De grootte van  $v(S)$  kunnen we berekenen m.b.v. de theorie der 2-personen spelen.

De strategie  $(\alpha)$  van een coalitie denken wij opgebouwd uit de strategieën van de deelnemers  $(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots)$ . De strategieën van de spelers, die niet tot de coalitie behoren  $(\beta_i)$  kunnen wij eveneens tot één strategie  $(\beta)$  samenvoegen. Het  $n$ -personen spel is zo vereenvoudigd tot een spel voor twee groepen, met som nul:  $v(S) = v(N - S)$ . Wij kunnen nu de optimale strategieën zoeken, op dezelfde wijze als voor het 2-personen spel, door de rij-minima en kolom-maxima te bepalen. Als wij de strategieën  $\alpha$  in de rijen plaatsen en de strategieën  $\beta$  in de kolommen, dan is de winst van de coalitie de karakteristieke functie

$$v(S) = \max_{\alpha} \min_{\beta} E(S) = \min_{\beta} \max_{\alpha} E(S).$$

Wij hebben hier de notatie gebruikt voor het algemene geval van gemengde strategieën  $(\alpha, \beta)$  en mathematische verwachting  $E(S)$ , hoewel pure (enkelvoudige) strategieën natuurlijk niet uitgesloten zijn.

De theorie (van v. Neumann) tracht m.b.v. de karakteristieke functie en het begrip strategische equivalentie alle oplossingen van  $n$ -personen spelen te vinden. Dit is tot nog toe slechts mogelijk gebleken voor de 3- en 4-personen spelen. Bovendien is het experimenteel niet evident dat spelers inder-

daad voordeel kunnen trekken uit de kennis van de karakteristieke functie en de oplossing van het spel.

Men tracht nu op andere wijze het probleem te benaderen, o.a. door, uitgaande van een niet-coöperatief spel, additionele spelregels op te stellen omtrent onderlinge afspraken, omkoop-sommen, communicatiemogelijkheden, enz., die stap voor stap de vorming van coalities mogelijk moeten maken.

Men is echter nog niet zover gevorderd met deze theorieën dat wij hierop in kunnen gaan.

### Besluit.

Onze schets van de theorie is geenszins volledig. Recente ontwikkelingen in de methode van oplossen en verschillende soorten van  $n$ -personenspelen zijn geheel buiten beschouwing gelaten. Ook bluffen en signaleren, zoals dit resp. bij poker en bridge wordt toegepast, zijn niet genoemd.

Bij de beoordeling van de activiteit, die momenteel in de ontwikkeling van de speltheorie heerst, bedenke men vooral dat het spel slechts een model is, waarvan de theorie zich bedient.

De militaire toepassingen liggen voornamelijk op het gebied van de twee-personenspelen, bijv. het duel, verdeling van strijddrachten over verschillende aanvalswegen, aanleggen van optimale voorraden, e.d.

Ook in de telecommunicatie-theorie wordt gebruik gemaakt van de speltheorie, vooral ook van de statistische uitbreiding hiervan (Wald, Statistical Decision Functions). Daarbij worden ruis en andere storende invloeden opgevat als de „tegen-spelende natuur”. De optimale strategie, die wij tegen de natuur moeten toepassen volgens het mini-max principe, levert de voorwaarden voor optimale detectiemethoden, optimum filters en optimale codering.

De theorie van de twee-personenspelen wordt in het algemeen meer toegepast dan die van de  $n$ -personenspelen. Enerzijds ligt dit aan de veelvuldigheid waarmee het zuiver tegen-gesteld gericht handelen in de praktijk voorkomt, anderzijds is dit te wijten aan het ontwikkelingsstadium waarin de theorie van de  $n$ -personenspelen verkeert.

In het dagelijkse leven moet een ieder wel eens uit verschillende gedraglijnen kiezen. In plaats van op goed geluk kan men de juiste strategie vinden met behulp van het mini-max principe. Hiervoor is slechts weinig wiskundige kennis nodig. Het pro-



bleem ligt veeleer in de opstelling van een verantwoorde spel-matrix: Welke waarde vertegenwoordigt het resultaat van een bepaalde handeling, aangewend tegen de strategie van een tegenstander? Deze resultaten zijn soms in het geheel niet in numerieke of monetaire waarden uit te drukken. De waarde van één gulden verschilt bovendien nog voor elk individu.

Het grote nut van de speltheorie boven de intuïtieve methode is echter vooral bewezen in de gecompliceerde gevallen, waar met behulp van elektronische rekenmachines de juiste strategie wordt gevonden uit een zeer groot aantal mogelijkheden.

## Literatuur.

Voor degenen, die zich in de theorie der strategische spelen willen verdiepen, volgt hier een overzicht van de voornaamste literatuur. Wij mogen een ieder, misschien op wiskundigen na, aanraden enkele populaire werkjes door te lezen voordat men aan de vakliteratuur begint. Deze is over het algemeen te abstract.

Tot de eerste categorie behoren:

1. J. McDonald: Strategy in Poker, Business and War, Norton, New York.
2. J. D. Williams: The complete strategist. McGraw Hill, New York, 1954.
3. M. Shubik: Readings in game theory and political behaviour, Doubleday.

Als studieboek is aan te bevelen:

4. J. C. C. McKinsey: Introduction to the theory of games, McGraw Hill.

terwijl het standaardwerk op dit gebied is:

5. J. v. Neumann and O. Morgenstern: Theory of games and economic behavior, Princeton U.P.

Afzonderlijke (theoretische) bijdragen en een uitgebreide bibliografie zijn samengevat in:

6. Kuhn and Tucker: Contributions to the theory of games I, II, III. Ann. of Math. Series, Princeton U.P.)

Wat de nevengebieden betreft noemen wij slechts enkele werken uit de reeds zeer uitgebreide literatuur:

*Mathematische statistiek.*

7. O. Bross: Design for decision.
8. Thrall-Coombs-Davis: Decision processes.
9. A. Wald: Statistical decision functions.



*Lineair programmeren:*

10. S. Vajda: The theory of games and linear programming.
11. Charnes, Cooper, Henderson: Introduction to linear programming.
12. Tj. Koopmans: Activity analysis of production and allocation, Wiley

*Operations research.*

13. Morse and Kimball: Operations research, The Technology Press.
14. Closkey and McTrefthen: Operations research for management. J. Hopkins Press, '54.
15. Journal of the Operations Research Society of America.
16. Operations Research Quarterly (Br.).
17. Naval Research Logistics Quarterly (Am.).

*Communicatietheorie.*

18. B. Mandelbrot: Jeux de communication, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, vol. 2. 1953.
  19. B. Mandelbrot: Simple games of strategy occurring in communication through natural languages, Trans. IRE PGIT-3, maart '54.
  20. Yovits and Jackson: Linear filter optimization with game theory considerations, IRE Conv. '55 pt. 4, p. 193.
  21. Bussgang and Middleton: Optimum sequential detection of signals in noise, Trans. IRE IT-1. dec. '55 p. 5.
  22. Kalaba and Juncosa: Linear Programming and Optimal Telecommunication Networks. Proc. IRE 44 (1956) Dec. p. 1874.
  23. Kuhn and Tucker: Linear inequalities and related systems. Princeton
  24. Antosiewicz: Second symposium on linear Programming I & II.
-

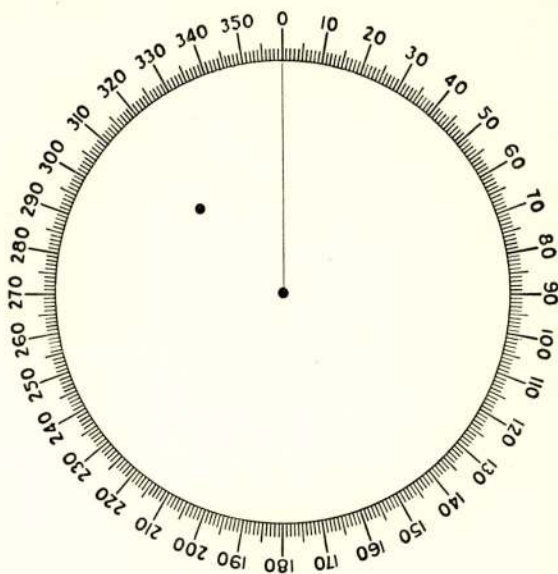


## NIEUWE ONTWIKKELING OP HET GEBIED VAN SCHEEPSRADAR EN AUTOMATISCH PLOTTEN

Op de van 16—19 mei te Genua gehouden „Conferenza Internazionale del Radar” gaf het Amerikaanse Raytheon concern de gegevens vrij van een geheel nieuw systeem scheepsradar, waarvan hieronder een verklaring wordt gegeven, ons verstrekt door Radio Holland N.V., Amsterdam.

Figuur 1 stelt een radarscherm voor, waarop een echo van een schip zichtbaar is. Aannemende, dat het ingestelde schaalbereik 20 mijl bedraagt, neemt men waar, dat de afstand van het schip 12 mijl en de relatieve peiling  $315^\circ$  bedraagt. Zonder meer kan men hieruit geen verdere gegevens putten. Slechts na een zeker tijdsverloop, na een reeks van waarnemingen, kan men de relatieve snelheid van het andere schip bepalen door middel van een plot, zoals figuur 2 aangeeft.

Men ziet direct in, dat er zonder verdere maatregelen een aanvaring zal plaats vinden tussen het eigen schip en het waargenomen schip. Al zal de



Figuur 1

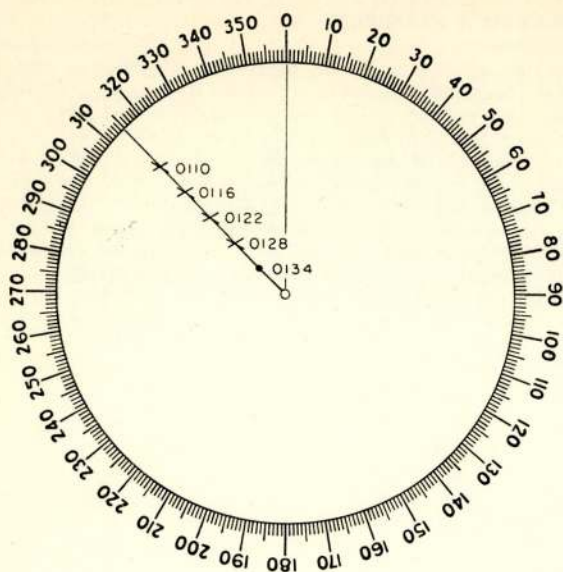
officier van de wacht wellicht veelvuldig de echo's van andere schepen waarnemen met de „bearing cursor” ten einde te bepalen of er aanvaringsgevaar bestaat of zich ontwikkelt, meestal is het bezwaarlijk het plot continu uit te voeren, vooral indien een groter aantal objecten gelijktijdig moet worden waargenomen.

Het ware een groot gemak, indien er een automatisch „geheugen” beschikbaar zou zijn, waarmee van ieder voorwerp, dat door de radar wordt waargenomen, de afstand en de peiling voortdurend wordt opgetekend en over een zekere periode wordt bewaard.

Zo'n automatisch geheugen is thans beschikbaar in de vorm van een „geheugenbuis” of, zoals de Amerikanen dit uitdrukken, een „storage tube”.

Deze „geheugenbuis” lijkt in constructie veel op de normale kathodestraalbuis van een radarapparaat; deze geheugenbuis vormt echter zelf geen zichtbaar beeld, doch houdt de informatie vast (instelbaar tussen een bedrag van enkele milliseconden en 1 maand) in de vorm van elektrische ladingen op het scherm. Deze geheugenbuis wordt geschakeld tussen de ontvanger van de radarinstallatie en de kathodestraalbuis waarop men het beeld waarneemt. Voor automatisch plotten met een scheepsradarinstallatie wordt gedacht aan het vasthouden der informatie gedurende een tijd van 30 minuten. Te allen tijde kan de vastgehouden infor-



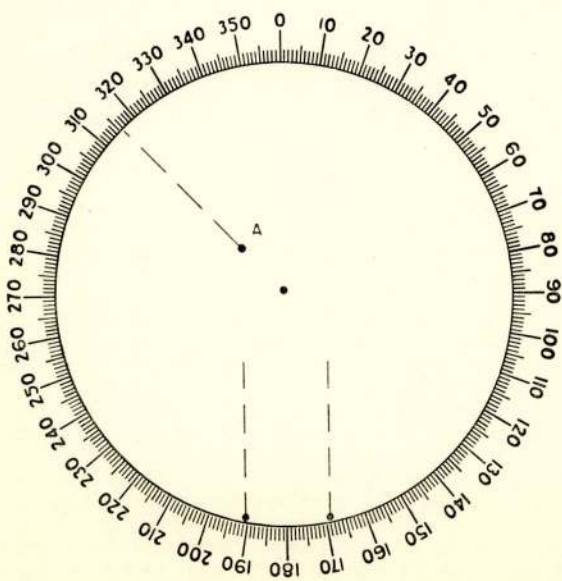


Figuur 2

matie in het tijdsbestek van enkele milliseconden van de geheugenbuis worden verwijderd, waarna deze onmiddellijk weer begint een nieuw radarbeeld te vormen.

Wat zien we nu, indien wij met de radarinstallatie zouden werken, welke zo'n geheugenbuis bevat.

Wij verwijzen hiervoor naar figuur 3, welke een voorstelling geeft van het-



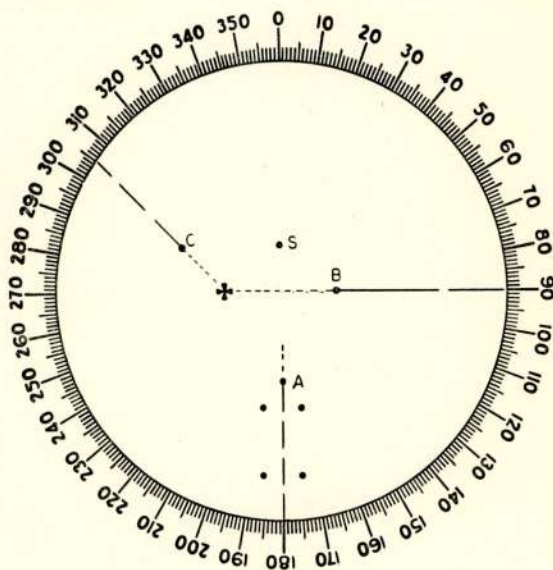
Figuur 3

geen op het scherm zichtbaar wordt, indien wij ons zouden bevinden in een door boeien gemarkeerde vaargeul, terwijl wij ons bewegen in de richting van een koers-kruisend vaartuig. De presentatie van het radarapparaat is relatief.

Men krijgt dan een automatisch plot van hetgeen in het afgelopen half uur werd waargenomen. Het wordt direct duidelijk, dat de zich niet veranderende peiling van het schip A aanvaringsgevaar oplevert. Men ziet ook in figuur 3, dat de zich aftekenende lijnen van alle voorwerpen periodiek zijn onderbroken. De perioden van onderbreking geschieden volgens een bepaald tijdschema en deze geven aldus een directe maat voor de snelheid.

Indien b.v. de onderbreking plaats vindt iedere 6 minuten, dan bedraagt de snelheid 10 x de lengte. Met een steekpasser kan men direct de relatieve snelheid van het schip A bepalen en voorspellen op welk tijdstip de aanvaring zou plaats vinden.

Nog belangrijker is, dat, wanneer men in dit geval van koers veranderd is ten einde de verwachte aanvaring te voorkomen, men het scherm ineens kan



Figuur 4

schoonvegen, zodat zich dan aanstonds een nieuw automatisch plot kan ontwikkelen, waaruit men binnen enkele ogenblikken kan waarnemen, in welke mate de situatie zich heeft gewijzigd.

Een verder voordeel is dat deze geheugenbuis een aanmerkelijke verbetering zal brengen van de maximum waarnemingsafstand, terwijl eveneens het waarnemen van voorwerpen in „seaclutter” en regen verbeterd zal worden; immers, „seaclutter” en regenecho's verschijnen willekeurig en onregelmatig, terwijl vaste voorwerpen op dezelfde plaats op het scherm van de geheugenbuis een accumulerend effect zullen veroorzaken.

Het grote voordeel van deze ontwikkeling komt eveneens naar voren, indien het principe van de geheugenbuis gecombineerd wordt met het beginsel der „True Motion”.

In figuur 4 wordt getoond, welk beeld men zal verkrijgen, indien de geheugenbuis wordt gekoppeld aan het True Motion beginsel.

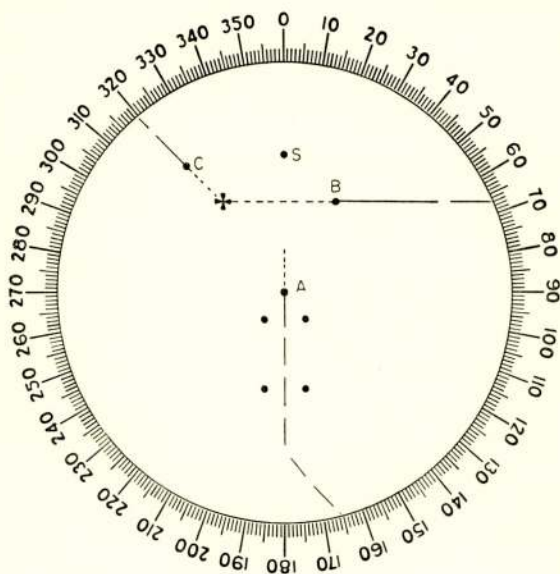
Wij bevinden ons op schip A, dat juist de met boeien gemarkeerde vaargeul verlaat en zich beweegt naar het lichtschip S. Voorts worden twee andere schepen B en C zichtbaar. De onderbroken lijnen welke de afgelegde vaart van de schepen vertegenwoordigen, wijzen direct uit, dat, indien alle vaartuigen hun

huidige koers en snelheid behouden, B en C met elkaar in aanvaring zullen komen.

Het schip A kan dus bij voorbaat rekening houden met de handelingen die B en C zullen gaan doen.

Men is nog een stap verder gegaan en wel door het True Motion beginsel samen te koppelen met het „klassieke relatieve beeld”. Het is nl. niet moeilijk het „True Motion beeld”, dat op het scherm van de geheugenbuis gevormd wordt, op zodanige wijze over te brengen naar de kathodestraalbuis, waarop men de waarnemingen uitvoert, dat het centrum van het scherm weer steeds samenvalt met de eigen positie van het schip. Indien wij zulks doen, dan krijgen wij in plaats van de voorstelling op figuur 4, die van figuur 5.

Wij hebben dan voor het eigen schip weer het „klassieke relatieve beeld” terug, waarbij de vaste voorwerpen (boeien, land, etc.) zich relatief over het scherm bewegen, doch waarbij de zich bewegende voorwerpen worden getoond met hun ware koers en snelheid. De vaste voorwerpen zullen, doordat de beeld-



Figuur 5

buis een niet nalichtend scherm bezit, geen nalichtende sporen achter laten. Daar dit zichtbare radarbeeld wordt gevormd op een buis voorzien van een P4 scherm betekent dit, dat de helderheid en het contrast belangrijk groter is dan die welke wij tot nu toe kenden bij conventionele radarapparatuur, welke een buis met P7 scherm bezitten.

Met deze nieuwe ontwikkeling krijgen wij dus een radarbeeld, dat het aspect aangeeft van andere vaartuigen, dat de geschiedenis geeft van hun bewegingen in het verleden en dat praktisch onmiddellijk een waarschuwing geeft van iedere verandering in koers en snelheid. Vaste voorwerpen (boeien, land, etc.) zijn direct kenbaar, omdat deze geen nalichtende lijnen produceren.

Apparatuur, waarin deze automatische plotter wordt toegepast is reeds meer dan 2 jaar geleden in Amerika gefabriceerd en toegepast bij luchtwaarschuwingssystemen voor het automatisch volgen van vliegtuigen.

In het afgelopen jaar werd dit beginsel beproefd in combinatie met scheeps navigatie radar, zowel op relatieve basis (zoals in het eerste gedeelte werd uiteengezet) als op basis van een „True Motion” automatische plotter.



## STICHTING VOOR MOEILIJK TOEGANKELIJKE WETENSCHAPPELIJKE LITERATUUR

Bovengenoemde Stichting, Thomsonplein 13, Den Haag, tel. 390989, werd op 4 april 1957 opgericht door curatoren der T.H., een speciale sectie der Ned. Ver. v. Bibliothecarissen, het N.I.D.E.R. en het Fysisch Lab. R.V.O.-T.N.O., onder het dagelijks bestuur van dr. L. J. van der Wolk, voorz. en P. H. Berke-laar, secr.-penningmeester.

Zij beoogt: inventarisatie van vertalingen uit Scandinavische, Slavische, e.a. minder toegankelijke talen zoals Japans, Chinees en Russisch. Bedrijfsleven en instellingen gelieven kopieën van in hun bezit zijnde vertalingen aan de stichting ter beschikking te stellen, ter algemene besparing op vertaalkosten en vergemakkelijking van kennisname, in het algemeen de stichting in haar taak te steunen en zich, om op dit gebied voorgelicht te worden, tot deze te wenden en niet meer tot de bibliotheken van de Octrooiraad en de T.H.

Archieven en kaartsysteem der Commissie Russische Literatuur zijn bij de stichting ondergebracht. Genoemde commissie zal zich nog slechts bezighouden met theoretische kwesties als de translitteratie van Cyrillische schrifttekens, het uitwisselen van ervaring op het gebied van de Russische technische literatuur en het bijstaan van de stichting.

---

## NTG — NACHRICHTENTECHNISCHE GESELLSCHAFT IM VDE

Onze Duitse zusterorganisatie zond ons een kennisgeving van de volgende door haar te organiseren bijeenkomsten:

1. Fachtagung „Funktechnik“, Ulm/Donau, 17—19 september 1957.

Op het programma staan een 20-tal voordrachten die in een 4-tal groepen verdeeld kunnen worden, zoals Propagatie, Toepassing van Dopplereffect in de Radartechniek, Korte golfapparaten en zenders, Antennes.

Op 19 september wordt een bezoek aan een tweetal fabrieken van Telefunken georganiseerd.

Inlichtingen en aanmeldingsformulieren bij: Tagungsgeschäftsstelle zur Fachtagung „Funktechnik“ z. Hdn. Herrn Dipl.-Ing. E. Haupt, Ulm/Donau, Söflingerstrasse 100, i. Hs. Telefunken.

2. Fachtagung „Bauelemente“, Karlsruhe, 23—26 sept. 1957.

Hier worden een 25-tal voordrachten gehouden over de volgende onderwerpen.

23 september: „Röhren“;

24 september: „Halbleiterbauelemente“;

25 september: „Allgemeine Bauelemente und Werkstoffe“.

Op 26 september wordt een bezoek aan een tentoonstelling van „Bauelemente“ en een bezoek aan Siemens en Halske A.G. te Karlsruhe-Knielingen gebracht.

Inlichtingen en aanmeldingsformulieren bij Tagungsgeschäftsstelle für die Fachtagung „Bauelemente“ im Hause der Siemens & Halske A.G. z. Hdn. Herrn Obering. H. Nottbroch, Zentral-Fachbücherei, Karlsruhe-Knielingen. Rheinbrückenstrasse 50.

3. Ter gelegenheid van de INTERKAMA (Internationaler Kongress mit Ausstellung für Messtechnik und Automatik) in Düsseldorf van 2—10 november 1957 organiseert de N.T.G. tezamen met de groep „Regelungstechnik“ van de VDI en VDE op 6 november 1957 een Fachtagung „Regler und Regelungsverfahren in der Nachrichtentechnik“.

Prospecti over deze bijeenkomst te verkrijgen bij INTERKAMA-Kongressbüro, Düsseldorf. Ehrenhof 4 (NOWEA).

---

## ENKELE GEGEVENS BETREFFENDE DE STUDIE AAN DE T. H. TE EINDHOVEN

Na de laatste wereldoorlog toen Nederland teneinde zijn levenspeil te kunnen handhaven zich gedwongen zag te industrialiseren, bleek het snel stijgende aantal

afstuderende ingenieurs aan de Technische Hogeschool te Delft nog geenszins voldoende. Verschillende commissies, door de regering ingesteld teneinde dit probleem te bestuderen, kwamen tot de conclusie dat een spreiding van de opleidingsmogelijkheden uitkomst zou kunnen brengen. Op 23 juni 1956 werd een gewijzigde hoger onderwijswet bij besluit van de Koningin in werking gesteld, waarbij Eindhoven werd aangewezen als de plaats, waar een tweede technische hogeschool zou worden opgericht en werd tevens op deze datum het Curatorium van deze hogeschool benoemd. Op 15 november 1956 daaropvolgend werd de senaat geïnstalleerd. Met grote snelheid zijn de eerste provisorische gebouwen ontworpen, aanbesteed en in uitvoering genomen, waardoor nu in september 1957 reeds de colleges voor de eerstejaars studenten een aanvang zullen nemen en wel voor de richtingen werktuigbouwkunde, electrotechniek en scheikundige technologie. Volgens de wet zullen de opleidingen aan de beide technische hogescholen gelijkwaardig zijn en dit betekent dat de nominale studieduur in beide gevallen gelijk zal zijn, terwijl het afstuderen desgewenst ook aan de andere hogeschool zou kunnen plaats vinden. Ook in Eindhoven zal de mogelijkheid bestaan voor het verrichten van researchwerk op wetenschappelijk en technisch terrein en zal de mogelijkheid bestaan tot promotie tot doctor in de technische wetenschappen. Evenals dit bij de verschillende universiteiten in Nederland onderling het geval is, zal echter het onderwijs niet geheel gelijkvormig zijn. Zoals dit op vele plaatsen in het buitenland bestaat, zal in Eindhoven een z.g. semestersysteem worden ingevoerd. Dit houdt in dat de college-stof van het eerste jaarsemester zal worden gedoceerd van september tot januari en van het tweede jaarsemester van januari tot in juni. Na elk semester zal gelegenheid worden gegeven om in de behandelde stof tentamen of examens te doen. De gegeven vakken worden buitendien zoveel mogelijk in één semester geconcentreerd zodat de aandacht niet teveel zal worden verdeeld. Tweemaal per jaar zal op deze wijze gelegenheid worden geboden in de verworven kennis examens af te leggen. De verwachting is dat bij een eventuele achterstand in de studie de student slechts 1 semester zal behoeven te verliezen, terwijl de mogelijkheid hierdoor ontstaat voor de ouderejaars studenten om zonder moeilijkheden een half jaar in de industrie te gaan werken.

De indeling van het studieprogramma bestaat uit 8 semesters, d.w.z. 4 jaar, college-stof en daarna volgt het afstuderen. Het propaedeutisch-examen wordt reeds na de eerste twee semesters dus na 1 jaar afgenomen. Anderhalf jaar later, dus na het vijfde semester, wordt het kandidaats-examen afgenomen en na nogmaals anderhalf jaar, dus na het achtste semester, vindt het eerste gedeelte van het ingenieursexamen plaats. Voor het afstuderen, dat hierna volgt, zal een half à één jaar moeten worden uitgetrokken.

Voor de richting der electrotechniek zijn basisvakken gedurende de propaedeutische en kandidaatsstudie de wiskunde, natuurkunde, mechanica, theoretische electriciteitsleer.

Reeds tijdens het propaedeutisch-examen zal een college over wijsgerig-culturele beschouwingen over techniek en samenleving worden gegeven, teneinde de student meer algemeen te vormen.

Het propaedeutisch-examen wordt beschouwd als een test van de student op het volgen van hoger onderwijs in de electrotechniek. Tijdens de kandidaatsstudie worden inleidende electrotechnische colleges gegeven zoals de electronica, het omzetten van elektrische energie, de communicatiemiddelen, het electrotechnisch meten, materiaalkunde en een college in electrotechnische constructies.

De studie voor het eerste gedeelte van het ingenieursexamen bestaat uit een aantal meer gespecialiseerde electrotechnische vakken, die verplicht worden gesteld. Voorts een aantal keuzevakken, waaruit de student een keuze kan maken naar gelang zijn voorkeur of aanleg.

Practica-oefeningen en zelfstandige onderzoekingen in de laboratoria naast het werken in de praktijk completeren deze fase van de studie.

Voor het tweede gedeelte van het ingenieursexamen zal een zelfstandige bewerking worden verlangd van een electrotechnisch onderwerp. Na het behalen van het ingenieursdiploma bestaat de gelegenheid zich verder te bekwalen in onderzoekingswerk teneinde de researchaantekening bij het ingenieursdiploma te verkrijgen.

J. L. H. J.



## PRIJZEN TOEGEKEND DOOR HET VEDERFONDS



N. Schimmel



Ir. E. Goldbohm



Ir. G. Prins

Het belangrijke ontwikkelingswerk onder leiding van de Heren Schimmel, Goldbohm en Prins in het Nederlands Radar Proefstation te Noordwijk a/Z verricht, heeft een essentiële bijdrage geleverd bij de totstandkoming van een inrichting voor radarbeloeding van de Nieuwe Waterweg.

De Rotterdamse Waterweg, 30 km lang, met vele bochten, een breedte van 350 meter, echter een vaarbreedte van grote schepen (35000 ton) die aanzienlijk smaller is, schept bijzondere navigatieproblemen.

Een systeem dat mogelijkheden schept ook voor omstandigheden van slecht zicht, is van primair belang en dient aan hoge eisen te voldoen. De sinds november 1956 in gebruik zijnde inrichting voor radarbeloeding van de Nieuwe Waterweg is als een van de meest geperfectioneerde te beschouwen. Met de realisering van dit project is baanbrekend werk verricht.

J. H.



Aan Ir. S. Gratama, geb. 5-6-1905, werd een prijs toegekend uit het Vederfonds op grond van zijn werk op het gebied der zgn. scatter-propagatie.

Gedurende de laatste jaren heeft de voortplanting van m- en dm-golven door verstrooiing in de troposfeer (scatter) steeds meer van zich doen spreken en men zou zelfs de uitspraak kunnen doen dat deze wijze van propagatie met zeer belangrijke toepassingsmogelijkheden thans in het brandpunt van de belangstelling staat.

Reeds in 1950 nam in Nederland Ir. Gratama, verbonden aan het Fysisch Laboratorium der Rijksverdedigings organisatie T.N.O., het initiatief tot een grootscheeps en systematisch onderzoek met betrekking tot deze materie, een onderzoek, trajecten in West-Europa zowel over land als over zee omvat-

tende en bij verschillende weersomstandigheden verricht.

Belangrijke hulp werd bij dit onderzoek verleend door de radio-amateurs; het P.T.T.-bedrijf werd eveneens ingeschakeld.

De grote hoeveelheid statistisch materiaal die werd bijeengebracht heeft het mogelijk gemaakt een universele transmissie-kromme af te leiden waardoor troposferische scattersystemen voor afstanden tot 400 à 500 km vooruit kunnen worden berekend.

Behalve problemen van organisatorische aard werden vanzelfsprekend evenzeer technische aan de orde gesteld, welke o.m. hebben geleid tot de ontwikkeling van een zeer stabiele en ruisarme ontvanger.

Y. B.



## NIEUWE UITGAVEN

De redactie ontving:

*Basic Mathematics for Radio and Electronics* door F. M. Colebrook.

*Industrial Rectifying tubes*, Philips Technische Bibliotheek.

Deze uitgaven zullen in een der volgende nummers besproken worden.

## Boekbesprekingen

*Tube Selection Guide 1956/1957*, 124 bladzijden, 15,5 x 23,5 cm, 32 fig. Philips Technische Bibliotheek. Verkrijgbaar bij Meulenhoff & Co te Amsterdam. Prijs f 4.90.

Dit boekje geeft een overzicht van alle typen elektronenbuizen die op het Philips programma voorkomen, alsmede van exact daaraan gelijke en daarmee aequivalente typen.

In tabelvorm wordt een groot aantal gegevens samengevat (betreffende verwisselbaarheid, vervanging van verouderde typen enz.).

Bijzondere aandacht verdient de tabel waarin de buizen naar hun belangrijkste eigenschappen zijn gegroepeerd. M.b.v. deze tabel is het mogelijk bij het ontwerpen van nieuwe apparaten snel het juiste buistype te kiezen.

De tabellen zijn in de Engelse taal gesteld, terwijl een woordenlijst werd bijgevoegd voor de Franse, Duitse en Spaanse vertaling.

Wij menen dat met het verschijnen van dit boekje aan een behoefte werd voldaan.

v. B.

*Television receiving equipment*, door W. T. Cocking. 4th Edition, 454 pagina's, afm. 22 x 15 cm., 279 schema's en foto's. Uitgave van Wireless World door Iliffe & Sons Ltd., London. Prijs 30 sh. 0 d.

Het onderhavige werk is de 4e editie, welke, vergeleken met de vorige, grotendeels geheel herzien werd.

In het algemeen beperkt de inhoud zich tot het Engelse systeem van 405 lijnen met positieve beeldmodulatie. De 3 andere systemen, werkend met 525, 625 en 819 lijnen, worden zeer globaal behandeld.

Hoewel de tekst in hoofdzaak bedoeld is voor technici, die beschikken over een goede kennis van de Televisie-techniek, wordt in de eerste drie hoofdstukken op juiste wijze de fundamentele theorie behandeld, welke ten grondslag ligt aan de thans gebruikte Televisie-systemen.

De volgende zeven hoofdstukken zijn gewijd aan de problemen welke men tegenkomt bij het ontwerpen van elektro-magnetische afbuigsystemen voor een Televisie-ontvanger.

Deze problemen worden meer van praktische zijde dan van theoretische zijde beschouwd. De schrijver wijst erop, dat het ontwerpen van de betreffende schakelingen gewoonlijk meer op empirische dan op mathematische grondslag berust.

Daarna komen drie hoofdstukken betreffende het ontwerpen van synchronisatie-schakelingen, o.m. de fase-discriminator en vliegwielschakelingen ten behoeve van de horizontale synchronisatie. Dit geschiedt eveneens meer van een praktisch gezichtspunt.

Beeld- en geluidsversterking, alsmede detectie-schakelingen worden in de volgende acht hoofdstukken behandeld en wel thans op een meer wiskundige basis.

Er worden echter eveneens een aantal praktische ideeën bij het ontwerp van deze schakelingen belicht.

De laatste tien hoofdstukken behandelen antennes, storing, gevoeligheid, ruis, volumeregeling en voedingsapparaten.

Het werk besluit met een 7-tal appendixen, welke op systematische wijze gerangschikt, een aantal formules tonen, welke nuttig zijn voor de ontwerper van Televisie-ontvangers.

Het goed geschreven boek en de vele praktische ideeën maken van dit boek een waardevol naslagwerk.

C. B. B.

*Transistor circuits and servicing*, door B. R. A. Betteridge, gepubliceerd voor „Wireless & Electrical Trader” door Trader Publishing Co Ltd, mei 1957. 23 bladzijden, 22 x 15 cm. Prijs 2 sh. 6 d.

Over dit boekje kunnen wij kort zijn. Het is kennelijk bedoeld voor radiohandelaars, die draagbare transistorradio's moeten verkopen en repareren. De schrijver bespreekt daartoe de verschillende delen van een dergelijke radio in aparte hoofdstukken. Zo bevat hoofdstuk 4 de 1f eindtrap, terwijl hoofdstuk 5 voornamelijk het hf en mf deel bespreekt. Hoofdstuk 6 bevat enkele service-tips.

Dat men in 23 blz. geen volledige handleiding voor het gebruik van transistoren kan schrijven, is duidelijk. Toch ziet de schrijver nog kans enige belangrijke schakelingen naar voren te brengen, helaas met onvoldoende detailbespreking. Zo geeft hij b.v. in fig. 7 en 8 vier balans-eindtrappen, waarvan die in fig. 7 veruit de beste is, daar hier de voorinstelling van de eindtrap van de emitter van de sturende transistor wordt afgenomen, zodat deze schakeling voor een vrij breed temperatuurgebied bruikbaar wordt. Dit wordt door de schrijver niet naar voren gebracht.

Voor zijn doel is dit werkje bijzonder geslaagd; na het lezen ervan zal men echter slechts weinig meer van transistoren begrijpen, dan ervoor.

E. E. P. P.

*De transistor in theorie en praktijk*, door „Electronicus”, 85 bladzijden, 15,5 x 24 cm., 84 figuren. Uitgave „De Muiderkring”, Bussum. Prijs f 4,—.

Zoals bij deze uitgever te verwachten was, is dit boekje geschreven voor gevorderde amateurs. Het is gesplitst in twee delen: een theoretisch gedeelte (5 hoofdstukken) en een praktisch gedeelte (3 hoofdstukken). Het praktisch gedeelte bevat, behalve een uitgebreid bouwschema voor een transistor-radio-ontvanger nog een reeks schema's voor praktische hulpapparaten, zoals meetbruggen, flip-flops etc. Het theoretisch gedeelte bevat een bespreking van de theorie van de transistor, zowel wat fabricage als wat schakelwijze betreft. De schrijver begint bij atoomstructuur en eindigt via een hoofdstuk „ontwerpen van transistor-versterkers” bij de hf eigenschappen van transistoren.

Het boekje licht een tipje van de sluier op, die over de toepassing van transistoren ligt. Ongetwijfeld zal een amateur hier veel wijzer worden en na het lezen in staat zijn, zijn schakelingen met transistoren te verwezenlijken. Voor het gebruik in de kring van beroepstechnici is dit boekje te oppervlakkig en gaat het de wezenlijke moeilijkheden te ver voorbij.

E. E. P. P.

## **Uit het Nederlands Radiogenootschap**

### **WIJZIGING SAMENSTELLING REDACTIE**

Ingevolge drukke werkzaamheden, mede door een andere werkkring, heeft Ir. B. van Dijk bedankt als lid van de redactie van het Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap. Gaarne willen wij ook langs deze weg Ir. van Dijk dank zeggen voor de vele werkzaamheden die hij in het belang van ons orgaan heeft verricht.

Wij vonden Ir. L. Krul, werkzaam bij het Dr. Neher laboratorium, bereid om in de redactiecommissie zitting te nemen.



## PERSONALIA

## Prof. Ir. M. P. BREEDVELD



Kort geleden werd Ir. M. P. Breedveld benoemd tot gewoon hoogleraar in de Elektrotechniek aan de Technische Hogeschool te Delft. Hem werd opgedragen onderwijs te geven in de Elektronika.

De heer Breedveld vervulde van 1952 tot 1955 de functie van hoogleraar voor Telecommunicatietechniek aan de technische faculteit van de Universiteit Indonesia te Bandoeng.

De heer Breedveld is in de Nederlandse omroep geen onbekende. Hij vervulde de functie van chef van het Electro-Acoustisch Laboratorium van de Nederlandse Omroep te Hilversum en was daarna hoofd van het Bureau Technische Dienst van de Radio Omroep in Nederland. Later vervulde hij de functie van Hoofd van de Technische Dienst van de Radio Omroep in Indonesië, van 1948 tot 1952.

Wij wensen de heer Breedveld gaarne van harte geluk. Wij zijn er ons van bewust, dat zijn taak bij het Hoger Onderwijs van bijzonder groot belang is, gezien het grote gewicht van de elektronika in de industrie.

## Prof. dr. K. S. KNOL



Bij Koninklijk besluit van 1 juni 1957 is benoemd als gewoon hoogleraar in de afdeling der electrotechniek van de Technische Hogeschool te Eindhoven ons medelid dr. K. S. Knol en wel om onderwijs te geven in de electronica.

Prof. dr. Knol werd te Eenrum (Gr.) in 1908 geboren en studeerde, na de Rijks-H.B.S. te Groningen te hebben doorlopen, Natuurkunde aan de Rijksuniversiteit aldaar.

Van 1931—1937 was hij assistent op het Natuurkundig Laboratorium dezer Universiteit en promoveerde in 1934. Na zijn promotie bewoog hij zich op het terrein der kernphysica en studeerde in 1935 enige tijd aan het Kaiser Wilhelm Institut für Chemie in Berlijn-Dahlem onder leiding van Prof. Meitner.

Sedert 1 mei 1937 was hij verbonden aan het Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken. Zijn publicaties in binnen- en buitenlandse tijdschriften bewijzen zijn belangstelling voor het gebied der hogere frequenties o.a. de bijzondere effecten die alsdan optreden bij elektronenbuizen.

Prof. Knol hield voordrachten in binnen- en buitenland, o.a. ook voor het Nederlands Radiogenootschap.

Bij de opening der T.H.E. in september 1957 zal Prof. Knol zijn voordrachten beginnen met colleges over electriciteit en magnetisme.

J. L. H. J.



**Prof. dr. ir. A. A. Th. M. VAN TRIER**



Ons lid dr. ir. van Trier is bij Koninklijk besluit van 1 juni 1957 benoemd aan de Technische Hogeschool te Eindhoven om onderwijs te geven in de theoretische electriciteitsleer in de afdeling der electrotechniek.

Prof. van Trier werd te Oss in 1926 geboren, deed in 1942 staatsexamen gymnasium te 's-Gravenhage, behaalde in 1947 het diploma van electrotechnisch ingenieur en promoveerde in 1953 op een proefschrift getiteld „Guided electromagnetic waves in anisotropic media”.

Van 1947 tot 1953 was hij verbonden aan het laboratorium van de Rijks Verdedigingsorganisatie.

In 1949 werkte hij te Londen aan het Imperial College en in 1951 en '52 aan de Columbia University te New York; in de laatstgenoemde periode hield hij zich

met de detectie van Cerenkov-straling in het microgolvengebied bezig.

Sedert januari 1954 was hij werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken te Eindhoven, waar hij in het Natuurkundig Laboratorium onderzoeken verrichtte over gyroscopische resonantie in halfgeleiders voor microgolf-frequenties.

Prof. van Trier hield in Amerika en Nederland voordrachten en er verschenen van zijn hand publicaties in binnen- en buitenlandse wetenschappelijke tijdschriften.

J. L. H. J.

**Ir. A. T. DE HOOP**



Ir. A. T. de Hoop, tot voor kort wetenschappelijk ambtenaar 1e klasse in de Afdeling voor Electrotechniek van de Technische Hogeschool te Delft, werd kort geleden benoemd tot lector om onderwijs te geven in de theorie van de electriciteit.

De heer De Hoop behaalde 4 juli 1950 het diploma voor Electrotechnisch Ingenieur (met lof).

Een aantal publicaties op het gebied van de diffractie theorie van electromagnetische golven verscheen van zijn hand. Deze werden gepubliceerd in de Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Van mei 1956 tot april 1957 vertoefde de heer De Hoop in de Verenigde Staten van Amerika. Hij heeft daar in het Institute of Geophysics van de University of California te Los Angeles gewerkt aan problemen met betrekking tot de diffractie theorie van golven in elastische media.

Wij wensen de heer De Hoop van harte geluk en veel succes in zijn nieuwe functie.

J. P. S.

**Dr. Ir. S. DUINKER**

Op 19 juni 1957 promoveerde Ir. S. Duinker aan de Technische Hogeschool te Delft tot doctor in de Technische Wetenschap op een proefschrift, getiteld: „General properties of frequency-converting networks“. Promotor was Prof. Ir. B. D. H. Tellegen. De heer Duinker werd in 1924 te Batavia geboren. In 1950 verwierf hij het diploma van elektrotechnisch ingenieur aan de Technische Hogeschool te Delft. Van 1948 tot 1950 was hij assistent bij Professor Elias. In 1950 trad hij in dienst van het Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips Gloeilampenfabrieken te Eindhoven. Daar heeft hij gewerkt aan de toepassing van magnetische en diëlektrische materialen in schakelingen.

**NIEUWE LEDEN**

- Ir. J. A. Brakel, Oude Loosdrechtseweg 42, Hilversum.  
 W. P. Gerharz, Burg. van Holthelaan 3, Zeist.  
 Ir. J. N. A. M. van Gils, Willem Klooslaan 23, Voorburg.  
 Ir. J. T. de Jager, Dwingelo 109c.  
 Dr. G. Klein, Ziggenstraat 4, Geldrop (N.B.).  
 G. A. Klein, Jacob van Campenlaan 93, Hilversum.  
 Ir. C. A. Muller, Radiosterrenwacht, Dwingelo.  
 Ir. E. J. Nijenhuis, Acaciastraat 11, Den Haag.  
 P. van Prooyen, Cornelis v. d. Lijnstraat 58, Den Haag. (TNO).  
 Ir. G. L. Reijns, Lunterenstraat 192, Den Haag. (PTT).  
 Ir. J. Schelling, Kroonlaan 56, Hilversum. (PTI).  
 W. P. Stiekema, Randweg 75a, Rotterdam.  
 Ir. W. G. van der Touw, a/c RCA Victor S/A, C.P. 8460, Sao Paulo, S.P. Brazilië. (RCA Victor)  
 Ir. J. A. H. van Voorthuizen, Gen. van Daalenstraat 5, Rijswijk (Z.H.). (Octroiraad)  
 Ir. J. D. Zijp, Deijlerweg 30, Wassenaar. (PTT)

In het vorig nummer is bij diverse voorgestelde leden de werkkring onjuist of niet vermeld. Indien de werkkring thans aangegeven is betekent dit een correctie op de gegevens in het vorig nummer.

**VOORGESTELDE LEDEN**

- Ir. E. G. J. Brants, Willem Pijperstraat 10, Arnhem. (PBNA)  
 Ir. B. A. van Heijningen, Roeltjesweg 14, Hilversum.  
 J. Winters. (KLM)

**NIEUWE ADRESSEN VAN LEDEN**

- Drs. K. H. J. Bokhove, Petrarcalaan 47, Utrecht.  
 Ing. H. J. J. Bouman, Van Imhoffstraat 30, Den Haag.  
 Ir. B. van Dijk, SADTC, AC High Shape, Paris.  
 Ir. G. Franken, Sportlaan 83, Den Haag.  
 Ir. J. A. Hammer, Beatrixstraat 10, Noordwijk.  
 Ir. H. H. Heeroma, Hofcampweg 17, Wassenaar.  
 Ir. B. Hogeweg, Anske Lammingastraat 31<sup>3</sup>, Amsterdam.  
 Dr. Ir. H. de Lange Dzn, Min. Hartsenlaan 6, Hilversum.  
 Ir. A. Moerman, Irenelaan 15, Zoetermeer.  
 Ir. F. H. Plas, Kattensingel 54, Gouda.  
 Ir. H. Vissinga, Verdijkstraat 87, Den Haag.  
 Dr. J. A. Vreeswijk, Steynlaan 5, Baarn.